

Preprint No. M 10/14

**Zur Numerik nichtlinearer  
dynamischer Systeme**

**Teil 3: Quasi-periodische  
Schwingungen**

Vogt, Werner

Oktober 2010

**Impressum:**

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik  
Weimarer Straße 25  
98693 Ilmenau

Tel.: +49 3677 69-3621

Fax: +49 3677 69-3270

<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

**Zur Numerik nichtlinearer  
dynamischer Systeme  
Teil 3:  
Quasi-periodische Schwingungen**

Werner Vogt  
Technische Universität Ilmenau  
Institut für Mathematik

**18. Oktober 2010**

**Zusammenfassung** Der Beitrag stellt Grundbegriffe zu quasi-periodischen Orbits und wesentliche Algorithmen zur Berechnung invarianter Tori bei nichtlinearen dynamischen Systemen vor. Nach Einführung der Begriffe und geeigneter Funktionenräume wird der Zusammenhang zwischen quasi-periodischen und Torusfunktionen hergestellt. Aus der Vielzahl spezieller Ansätze zur numerischen Approximation von Torusmannigfaltigkeiten werden zwei praktikable und hinreichend allgemeine Vorgehensweisen behandelt und algorithmisch dargestellt. Während der erste Ansatz eine a-priori-Transformation in Toruskoordinaten erfordert, kann beim zweiten Ansatz in den vorgegebenen kartesischen Koordinaten gearbeitet werden – allerdings nur für quasi-periodische Tori. Praktische Anwendungen in der nichtlinearen Elektrotechnik und Aufgaben verdeutlichen die Wirksamkeit der beiden Verfahrensklassen.

**MSC 2010:** 37M20, 37C55, 65M06, 65N35

**Keywords:** Computational methods for bifurcation problems, periodic and quasiperiodic flows, finite difference methods, Galerkin method

## 1 Einleitung

*“The world is full of periodic and quasi-periodic motions and oscillations. That is multifrequency oscillations. Mathematically, to a large extent, that means the study of invariant tori of dynamical systems. These constitute the more systematic part of the phase space of a dynamical system as opposed to the chaotic parts and their study is just as (perhaps more) important as the study of chaos.”* (zitiert aus Samoilenko (1991))

Periodische Lösungen nichtlinearer dynamischer Systeme wurden in den vergangenen Jahren gründlich analysiert. Ein umfangreiches numerisches Instrumentarium steht dem Anwender zur Verfügung, wovon wir in Vogt (2010b) grundlegende Komponenten vorgestellt haben. Wesentlich weniger untersucht sind hingegen quasi-periodische Bewegungen mit mehreren Basisfrequenzen, treffender auch als „multifrequentielle Schwingungen“ bezeichnet. Derartige Lösungen bilden ein kompliziertes und sensitives Studienobjekt. Denn sie gehen bei kleinen Änderungen an den Differenzialgleichungen leicht in periodische Lösungen über, weshalb ein „stabilerer Träger“ dieser multifrequentiellen Schwingungen gesucht ist. Bereits Jules Henry Poincaré wusste, dass eine derartige Menge ein Torus ist. Als Träger quasi-periodischer Lösungen wurden deshalb invariante Tori von N. N. Bogoljubow und Y. A. Mitropolski untersucht. Eine spezielle Theorie existiert für bestimmte Hamiltonsche Systeme, die sogenannte KAM-Theorie (vgl. dazu die Darstellung in Argyris et al. (1995)), und theoretische Resultate liegen für lineare und „schwach nichtlineare“ dissipative Systeme vor. Wichtige Aussagen zu dieser praktisch wesentlichen Problemklasse findet man bei Iooss und Joseph (1990), Samoilenko (1991) und Broer et al. (1996). Numerische Verfahren zur Berechnung, Verfolgung und Stabilitätsanalyse

derartiger Schwingungen sind jedoch bisher nur eingeschränkt verfügbar und weiterhin Gegenstand der aktuellen Forschung.

Wir wollen uns in diesem Beitrag der recht anschaulichen Terminologie aus Samoilenko (1991) bedienen und nach Einführung wesentlicher Grundbegriffe die bekannten numerischen Zugänge betrachten, die wir auf konkrete praktische Probleme anwenden.

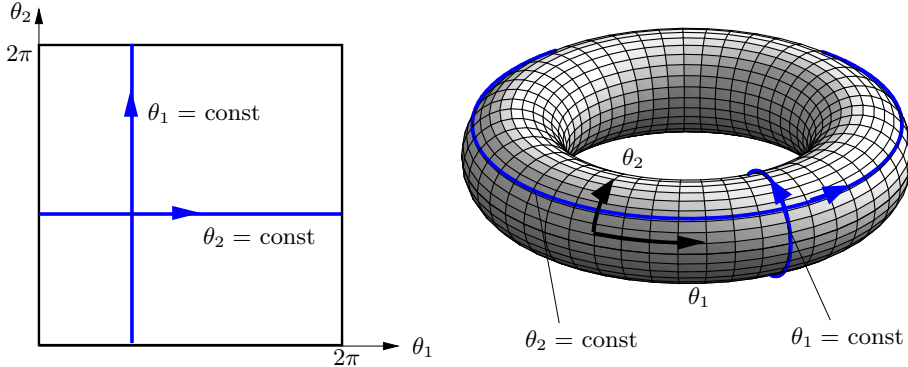
## 2 Quasi-periodische Funktionen

### 2.1 Torusfunktionen

Der  $p$ -dimensionale Standardtorus  $\mathbb{T}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$  – desweiteren auch kurz als  $p$ -Torus bezeichnet – mit den Winkelkoordinaten  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  modulo  $2\pi$  ist die Menge

$$\mathbb{T}^p = \{\theta \mid \theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T, \theta_i \in \mathbb{R} \bmod 2\pi, i = 1, \dots, p\}, \quad (1)$$

die über  $[0, 2\pi)^p$  parametrisiert ist. Speziell ist der 1-Torus  $\mathbb{T}^1 = S^1$  und der 0-Torus  $\mathbb{T}^0$  ist ein einziger Punkt. In Abbildung 1 wird der 2-Torus  $\mathbb{T}^2$  mit den (lokalen) Winkelkoordinaten  $\theta_1$  und  $\theta_2$  in  $\mathbb{R}^3$  dargestellt. Die Mannigfaltigkeit wird umkehrbar eindeutig auf das Quadrat  $[0, 2\pi)^2$  im Parameterraum abgebildet. Die Koordinatenlinien  $\theta_1 = \text{const}$  und  $\theta_2 = \text{const}$  sind in beiden Darstellungen eingezeichnet.



**Abb. 1** Der 2-dimensionale Standardtorus  $\mathbb{T}^2$ ; links: aufgeschnitten in den Winkelkoordinaten  $\theta_1$  und  $\theta_2$ ; rechts: dargestellt im Phasenraum  $\mathbb{R}^3$

Jede stetige Funktion  $F : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  in der Veränderlichen  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ , die  $2\pi$ -periodisch bezüglich  $\theta_1, \dots, \theta_p$  ist, heißt *reelle Torusfunktion*. Die Menge aller derartigen Funktionen bildet einen Vektorraum, in dem wir eine Norm

$$\|F\|_0 := \max_{\theta \in \mathbb{T}^p} |F(\theta)| \quad \text{mit der Euklidischen Vektornorm} \quad |F|^2 := \sum_{i=1}^n |F_i|^2$$

eingeführen können. Für einen beliebigen Vektor  $F \in \mathbb{R}^n$  soll desweiteren das Betragszeichen  $|F|$  stets die Euklidische Norm bezeichnen. Dieser vollständige normierte Raum ist

ein Banach-Raum und wird mit  $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$  abgekürzt. Falls  $F$   $r$ -mal stetig differenzierbar ist, d. h.  $F$  stetige partielle Ableitungen bezüglich aller Variablen  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , bis zur Ordnung  $r$  besitzt, so können wir dafür die  $\mathcal{C}^r$ -Norm

$$\|F\|_r := \sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha F\|_0 \quad \text{mit} \quad D^\alpha F := \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial \theta_1^{\alpha_1} \partial \theta_2^{\alpha_2} \dots \partial \theta_p^{\alpha_p}} \quad (2)$$

eingeführen. Dabei ist  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  ein Multi-Index mit  $|\alpha| := \sum_{i=1}^p \alpha_i$  und  $D^\alpha$  der klassische Differenzialoperator der Ordnung  $|\alpha|$  zum Multi-Index  $\alpha$ . Mit  $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$ ,  $r \geq 0$  bezeichnen wir dann den Raum der  $r$ -mal stetig differenzierbaren Torusfunktionen, welcher mit dieser Norm zu einem vollständigen normierten Raum wird.

### Beispiel 1

Die stetig differenzierbare Funktion  $F : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \pi \sin \theta_1 + \cos \theta_2 \cdot \sin \theta_3 - e^{\cos(\theta_1 - \theta_3)},$$

ist eine  $\mathcal{C}^r$ -Torusfunktion für beliebiges  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 0$ . Dagegen liegt  $F : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit

$$F(\theta_1, \theta_2) = (\cos(\theta_1 + \theta_2), |\cos \theta_1|, 4\pi, \cos^2 \theta_2)^T.$$

nur in  $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$ . ■

Betrachten wir nun trigonometrische Polynome  $N$ -ten Grades in  $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$ , die sich mit  $p$ -fachen Summen in der Form

$$P(\theta) = \sum_{|k| \leq N} a_k \cos(k, \theta) + b_k \sin(k, \theta) = \sum_{|k| \leq N} P_k e^{i(k, \theta)} \quad (3)$$

darstellen lassen. Darin ist  $k = (k_1, k_2, \dots, k_p)$  ein Vektor mit ganzzahligen Komponenten,  $|k|$  seine Euklidische Norm und  $(k, \theta) = k_1 \theta_1 + \dots + k_p \theta_p$ . Die Summenzeichen stehen für  $p$ -fache Summation. Zwischen den reellen Fourierkoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  und den komplexen Koeffizienten  $P_k$  besteht der Zusammenhang  $a_k = \operatorname{Re} P_k$  und  $b_k = -\operatorname{Im} P_k$  sowie  $P_{-k} = \overline{P_k}$  für reelle Funktionen  $P$ . Mit dem Weierstraß'schen Approximationssatz erhalten wir

### Satz 2

Jede Funktion  $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$  kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden, d. h. es existiert eine Folge trigonometrischer Polynome  $(P_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|F - P_m\|_0 = 0$ .

Damit ist der Banach-Raum  $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$  der Abschluss des Raumes  $\mathcal{P}(\mathbb{T}^p)$  der trigonometrischen Polynome bezüglich der Norm  $\|F\|_0$ . In diesem Polynomraum  $\mathcal{P}(\mathbb{T}^p)$  können wir nun ein Skalarprodukt einführen. Für die zwei trigonometrischen Polynome

$$P(\theta) = \sum_{|k| \leq N} P_k e^{i(k, \theta)} \quad \text{und} \quad Q(\theta) = \sum_{|k| \leq N} Q_k e^{i(k, \theta)}$$

definieren wir folgendes Produkt mit den üblichen Eigenschaften eines Skalarproduktes

$$\langle P, Q \rangle_0 := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \langle P, Q \rangle d\theta_1 \dots d\theta_p = \sum_{|k| \leq N} \langle P_k, Q_{-k} \rangle. \quad (4)$$

Mit den Koeffizientenvektoren  $P_k = (P_k^1, P_k^2, \dots, P_k^n)$  und  $Q_k = (Q_k^1, Q_k^2, \dots, Q_k^n)$  bezeichnet darin

$$\langle P_k, Q_{-k} \rangle := \sum_{j=1}^n P_k^j Q_{-k}^j$$

das bekannte Skalarprodukt zweier Vektoren im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Mit dem Skalarprodukt (4) definieren wir die zugehörige Norm  $\|P\|$  in  $\mathcal{P}(\mathbb{T}^p)$  mittels

$$\|P\|^2 = \langle P, P \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} |P|^2 d\theta_1 \dots d\theta_p = \sum_{|k| \leq N} |P_k|^2. \quad (5)$$

Der Abschluss von  $\mathcal{P}(\mathbb{T}^p)$  bezüglich dieser Norm liefert uns den Hilbert-Raum  $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$ , dessen Elemente durch die unendlichen trigonometrischen Reihen

$$F(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} F_k e^{i(k, \theta)} \quad \text{mit endlicher Summe} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |F_k|^2 \quad (6)$$

gegeben sind.  $\mathbb{Z}^p$  bezeichnet darin die Menge aller Vektoren  $k = (k_1, \dots, k_p)$  mit ganzzahligen Komponenten. Nach dem Satz von Riesz-Fischer ist jede Reihe  $\sum_k F_k e^{i(k, \theta)}$  mit endlicher Summe  $\sum_k |F_k|^2$  die Fourier-Reihe einer quadratisch summierbaren Funktion  $F$ . Deshalb kann  $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$  mit dem Raum  $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^p)$  der auf  $\mathbb{T}^p$  quadratisch summierbaren Funktionen identifiziert werden.

Mittels der Torusfunktion führen wir den Begriff der quasi-periodischen Funktion ein:

### Definition 3 (Quasi-periodische Funktion)

Es sei  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p) \in \mathbb{R}^p$  ein Vektor positiver reeller Zahlen. Die  $\omega_i$  sind *rational unabhängig (inkommensurabel)*, falls für alle  $k \in \mathbb{Z}^p$  mit

$$(k, \omega) = \sum_{l=1}^p k_l \omega_l = 0 \quad \text{stets} \quad k = (0, \dots, 0) \quad \text{gilt.}$$

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  der reellen Veränderlichen  $t$  mit der Darstellung

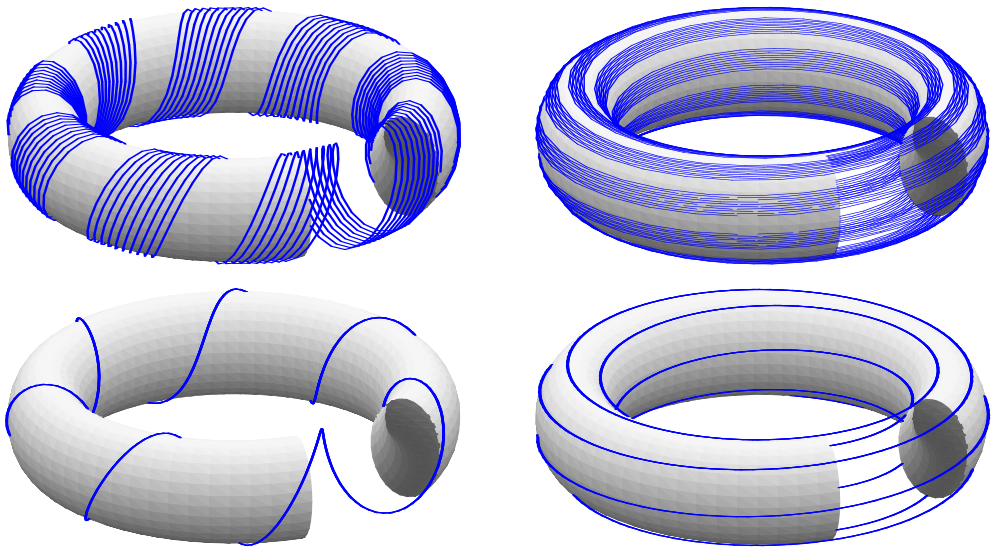
$$f(t) = F(\omega t) = F(\omega_1 t, \dots, \omega_p t),$$

wobei  $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$  ist, heißt *quasi-periodische Funktion*. Der Vektor  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$  heißt *Frequenzbasis* und die Zahlen  $\omega_1, \dots, \omega_p$  heißen *Basisfrequenzen* von  $f$ .

Periodische Funktionen sind trivialerweise quasi-periodisch mit einer Basisfrequenz  $\omega_1$  und Periode  $T = 2\pi/\omega_1$ . In den praktisch bedeutsamen Fällen mit zwei Basisfrequenzen sprechen wir von *biperiodischen* Funktionen, beim selteneren Auftreten mit drei Basisfrequenzen von *triperiodischen* Funktionen. Einen Orbit  $\gamma$  eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems wird man als quasi-periodisch mit  $p$  Basisfrequenzen bezeichnen, falls eine quasi-periodische Funktion  $F$  und  $p$  Basisfrequenzen  $\omega_i$ ,  $i = 1 \dots p$ , existieren, so dass sich der Fluss  $\varphi_t$  in der Form

$$\varphi_t(x_0) = F(\omega t) = F(\omega_1 t, \dots, \omega_p t) \quad (7)$$

darstellen lässt. In diesem Falle nennt man den invarianten Torus  $\mathcal{M}$  selbst quasi-periodisch. Andernfalls wird  $\mathcal{M}$  als *resonanter Torus* bezeichnet (vgl. Abb. 2).



**Abb. 2** Oben: Quasi-periodische Tori  $\mathcal{M}$  mit Basisfrequenzen  $\omega_1 = \exp(1), \omega_2 = 3/10$  (links) und  $\omega_1 = 3/10, \omega_2 = \exp(1)$  (rechts);

Unten: Resonante Tori  $\mathcal{M}$  mit Frequenzen  $\omega_1 = 7, \omega_2 = 1$  (links) und  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 7$  (rechts)

#### Beispiel 4

(a) Mit der Torusfunktion  $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  aus Beispiel 1 und den inkommensurablen Frequenzen  $\omega_1 = 1, \omega_2 = \pi, \omega_3 = \sqrt{2}$  ist

$$f(t) = F(\omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t) = \pi \sin t + \cos(\pi t) \cdot \sin(\sqrt{2} t) - e^{\cos(t - \sqrt{2} t)}$$

eine quasi-periodische (triperiodische) Funktion mit drei Basisfrequenzen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

(b) Dagegen ist  $f(t) = \cos(2.718t) - \sin(3.141592t)$  nicht quasi-periodisch mit zwei Basisfrequenzen (biperiodisch), da die beiden approximierten Frequenzen  $\omega_1 = 2.718 \approx e$  und  $\omega_2 = 3.141592 \approx \pi$  wegen  $(\omega, k) = 392699\omega_1 + (-339750)\omega_2 = 0$  nicht rational unabhängig sind.

(c) Die vektorwertige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$f(t) = (\cos(\sqrt{2} \cdot t) \cdot \sin t, \exp(\cos(\pi \cdot t)) + 1, \sin(\sqrt{8} \cdot t) \cdot \cos t)^T$$

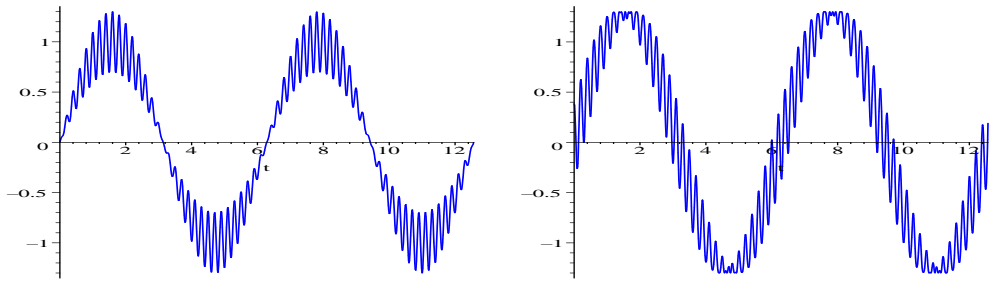
besitzt die drei Basisfrequenzen  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{2}$ ,  $\omega_3 = \pi$  und die zugehörige Torusfunktion  $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\cos \theta_2 \cdot \sin \theta_1, \exp(\cos \theta_3) + 1, \sin(2\theta_2) \cdot \cos \theta_1)^T$ .

(d) Zum Anfangswert  $x_0 = (0, 1, 0, 1)^T$  besitzt das DGL-System

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad \dot{x}_3 = \pi x_4, \quad \dot{x}_4 = -\pi x_3$$

den Fluss  $\varphi_t(x_0) = (\sin t, \cos t, \sin \pi t, \cos \pi t)^T$ . Dieser ist biperiodisch wegen der Inkommensurabilität von  $\omega_1 = 1$  und  $\omega_2 = \pi$  mit der Torusfunktion

$$F(\theta_1, \theta_2) = (\sin \theta_1, \cos \theta_1, \sin \theta_2, \cos \theta_2)^T. \quad \blacksquare$$



**Abb. 3** Amplitudenmodulation (links) und Frequenzmodulation (rechts)

Biperiodische Funktionen treten insbesondere bei *Amplitudenmodulation* und *Frequenzmodulation* auf. Mit den Basisfrequenzen  $\omega_1 = 1$  und  $\omega_2 = 10\pi$  werden in Abbildung 3 die Funktionen

■  $f(t) = (1 + 0.3 \cos(\omega_2 t)) \sin(\omega_1 t)$  (Amplitudenmodulation)

■  $g(t) = 1.3 \sin(\omega_1 t + 0.3 \cos(\omega_2 t))$  (Frequenzmodulation)

dargestellt. Gemäß Definition 3 sind beide biperiodisch. Wir wollen nun zwei nützliche Eigenschaften quasi-periodischer Funktionen anführen:

#### Satz 5

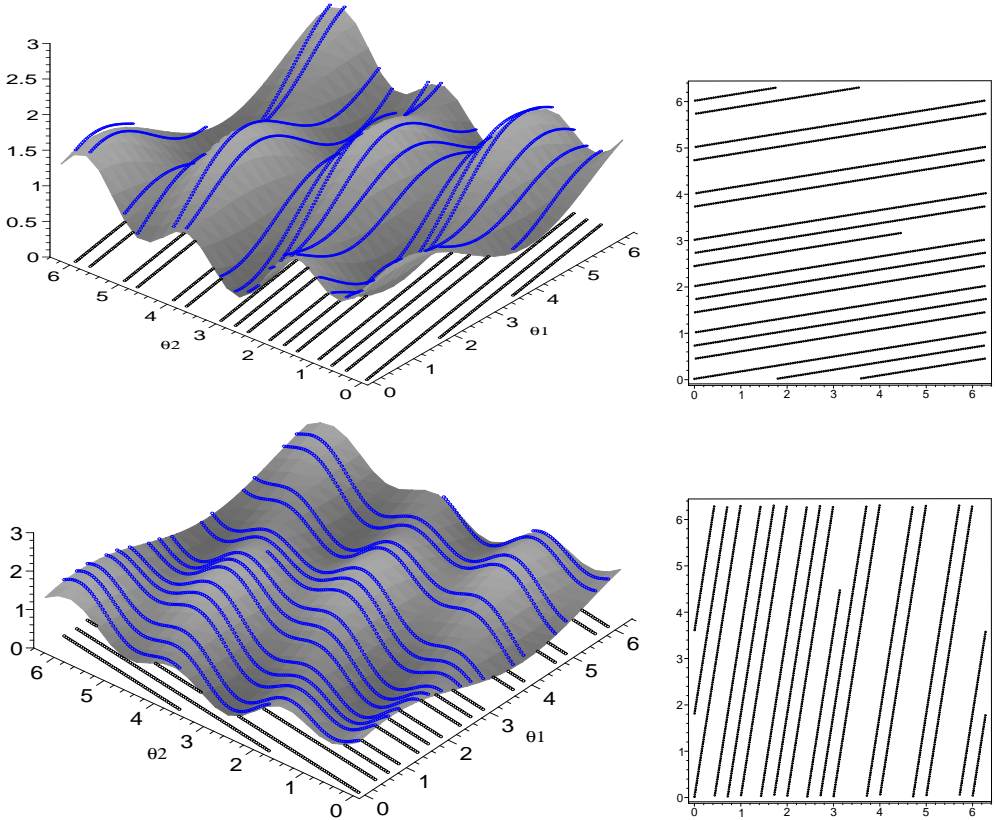
Die Menge der Werte einer quasi-periodischen Funktion  $f(t) = F(\omega t)$  ist *dicht* in der Menge der Werte der Torusfunktion  $F(\theta)$ .

Insbesondere ist das Supremum von  $|f|$  damit gleich der Norm von  $F$ , d. h.

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \max_{\theta \in \mathbb{T}^p} |F(\theta)| = \|F\|_0, \quad (8)$$



woraus folgt, dass  $f(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  genau dann gilt, wenn  $F(\theta) = 0$  für alle  $\theta \in \mathbb{T}^p$  ist. Anschaulich werden quasi-periodische Tori von jedem Orbit  $\gamma$ , der darauf verläuft, dicht gefüllt. Die gesamte Bewegung ist deshalb *ergodisch*, jedoch nicht chaotisch, da sie nicht sensitiv von den Anfangsbedingungen abhängt (vgl. Abb. 4). Da jedes  $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$  nach Satz 2 durch ein trigonometrisches Polynom der Form (3) approximiert werden kann, können wir jede quasi-periodische Funktion  $f(t) = F(\omega t)$



**Abb. 4** Quasi-periodische Tori  $\mathcal{M}$  in  $(\theta_1, \theta_2)$ -Koordinaten mit Orbits  $\gamma$ :  
(a) Basisfrequenzen  $\omega_1 = 2\pi, \omega_2 = 1$  (oben) und (b)  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2\pi$  (unten)

gleichmäßig durch *quasi-trigonometrische Polynome*

$$p_N(t) := P_N(\omega t) = \sum_{|k| \leq N} P_k e^{i(k, \omega)t} \quad (9)$$

approximieren, d. h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein Polynom  $P_N \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^p)$ , so dass  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - P_N(\omega t)| < \varepsilon$  ist.

Mit Hilfe quasi-trigonometrischer Polynome lässt sich folgender *Mittelwert-Satz* beweisen:

**Satz 6**

Für jede quasi-periodische Funktion  $f(t) = F(\omega t)$  existiert der Grenzwert

$$f_0 := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} f(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta_1 \dots d\theta_p \quad (10)$$

und konvergiert gleichmäßig bezüglich  $\tau \in \mathbb{R}$ . Der von  $\tau$  unabhängige Grenzwert  $f_0$  heißt *Mittelwert der Funktion  $f$* .

Die Menge aller quasi-periodischen Funktionen bildet einen Vektorraum, für den wir ebenfalls eine Norm

$$\|f\|_0 := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \quad \text{mit der Euklidischen Vektornorm} \quad |f|^2 := \sum_{i=1}^n |f_i|^2$$

eingeführen können und den normierten Raum  $\mathcal{C}^0(\omega)$  erhalten. Aus der Vollständigkeit des normierten Raumes  $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$  folgt zusammen mit der Eigenschaft (8), dass  $\mathcal{C}^0(\omega)$  ebenfalls ein Banach-Raum ist. Das Skalarprodukt  $\langle F, G \rangle_0$  zweier Torusfunktionen  $F, G \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$  induziert mittels (10) ein entsprechendes Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle_0$  der quasi-periodischen Funktionen  $f(t) = F(\omega t)$  und  $g(t) = G(\omega t)$

$$\langle f, g \rangle_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt = \langle F, G \rangle_0 \quad (11)$$

sowie eine Norm  $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle_0}$ . Die Funktionen  $e^{i(k, \omega)t}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^p$ , bilden dann ein vollständiges Orthonormalsystem in  $\mathcal{C}^0(\omega)$ . Jede Funktion  $f \in \mathcal{C}^0(\omega)$  kann durch eine Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} f_k e^{i(k, \omega)t} \quad \text{mit Koeffizienten} \quad f_k := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i(k, \omega)t} dt$$

dargestellt werden, die die Parseval'sche Gleichung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |f_k|^2 = \|f\|^2 \quad (12)$$

erfüllt. Auch im Banach-Raum  $\mathcal{C}^0(\omega)$  können wir den Unterraum  $\mathcal{C}^r(\omega)$  aller quasi-periodischen Funktionen  $f$  konstruieren, für die eine Torusfunktion  $F \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$ ,  $r \geq 0$ , mit  $f(t) = F(\omega t)$  existiert. Jede Funktion  $f \in \mathcal{C}^r(\omega)$  ist dann  $r$ -mal stetig differenzierbar in  $t \in \mathbb{R}$  und ihre Ableitungen sind quasi-periodisch. Führen wir auch hier eine Norm

$$\|f\|_r := \|F\|_r \quad \text{für} \quad f(t) = F(\omega t) \quad \text{mit} \quad F \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$$

ein, so ist der Raum  $\mathcal{C}^r(\omega)$  ebenfalls vollständig. Betrachten wir schließlich eine Funktion  $F(\theta) = \sum_k F_k e^{i(k,\theta)}$  aus dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$ . Mit einer gegebenen Frequenzbasis  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$  bilden wir die quasi-periodische Funktion  $f(t) = F(\omega t)$  mit der Reihe

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} F_k e^{i(k,\omega)t}.$$

Diese Funktionen bilden einen Vektorraum, den wir mit  $\mathcal{H}^0(\omega)$  bezeichnen. Zu zwei Funktionen  $f, g$  mit Fourier-Reihen  $f(t) = \sum_k F_k e^{i(k,\omega)t}$  und  $g(t) = \sum_k G_k e^{i(k,\omega)t}$  können wir Skalarprodukt und Norm durch

$$\langle f, g \rangle_0 := \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \langle F_k, G_{-k} \rangle, \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle_0$$

definieren. Für trigonometrische Polynome  $P(\theta) = \sum_{|k| \leq N} P_k e^{i(k,\theta)}$  aus  $\mathcal{P}(\mathbb{T}^p)$  bezeichne  $\mathcal{P}(\omega)$  den Raum der univariaten Polynome

$$p(t) = \sum_{|k| \leq N} P_k e^{i(k,\omega)t} \quad \text{zur Frequenzbasis } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_p).$$

Da  $\mathcal{H}^0(\omega)$  bezüglich der Norm  $\|f\|$  die Vervollständigung des Polynomraumes  $\mathcal{P}(\omega)$  bildet, ist  $\mathcal{H}^0(\omega)$  ebenfalls ein Hilbert-Raum.

Damit stehen uns nun die Banach-Räume  $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$ ,  $r \geq 0$ , und der Hilbert-Raum  $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$  für Torusfunktionen zur Verfügung. Zu gegebener Frequenzbasis  $\omega$  konnten wir daraus entsprechende Räume  $\mathcal{C}^r(\omega)$  und  $\mathcal{H}^0(\omega)$  quasi-periodischer Funktionen ableiten.

## 2.2 Quasi-periodische Bewegungen

Nach Einführung der Grundbegriffe wenden wir uns nun der Betrachtung autonomer DGL-Systeme

$$\dot{x} = f(x), \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad D \text{ offen}, \quad (13)$$

zu und setzen voraus, dass eine hinreichend glatte quasi-periodische Lösung

$$x = x(t, x_0) = F(\omega t) \quad \text{mit} \quad F \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p), \quad r \geq 1, \quad (14)$$

durch  $x_0$  existiert, deren Orbit  $\gamma = \{x \mid x = x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$  kompakt in  $D$  ist. Nach Satz 5 gehört der Abschluss von  $\gamma$  zur Menge  $D$  und besteht aus den Punkten, die durch die Darstellung

$$x = F(\theta) \quad \text{mit} \quad \theta \in \mathbb{T}^p \quad (15)$$

beschrieben werden. Das dadurch erzeugte Bild des Standardtorus  $\mathbb{T}^p$  werden wir mit  $\mathcal{M}$  bezeichnen. Welche Eigenschaften besitzt diese Menge?

1. Die Menge  $\mathcal{M}$  ist *invariant* bezüglich des Systems (13), d. h. sie besteht aus Punkten von Orbits dieses Systems. Setzen wir dazu die Lösung (26) in die DGL ein, so liefert die Integration

$$F(\omega t) = F(0) + \int_0^t f(F(\omega \tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Betrachten wir eine Funktionenfolge  $F(\omega t + \omega t_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  mit dem Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega t = \theta \pmod{2\pi}$ , so ergibt sich

$$F(\omega t + \theta) = F(\theta) + \int_0^t f(F(\omega \tau + \theta)) d\tau,$$

woraus  $x(t, F(\theta)) = F(\omega t + \theta)$  für  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\in \mathbb{T}^p$  folgt. Also ist die Menge  $\mathcal{M}$  invariant bezüglich (13).

2. Wegen (26) gehört die Lösung  $x(t, x_0)$  zu  $\mathcal{C}^r(\omega)$ . Angenommen, es kann eine zweite Frequenzbasis  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_q)$  mit  $q < p$  Basisfrequenzen gefunden werden, so dass  $x(t, x_0) \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  mit einer entsprechenden Torusfunktion gilt. Dann lässt sich nachweisen, dass die Lösung auch zu  $\mathcal{C}^r(\Omega)$  gehört. Für den Fall, dass dies nicht gelingt, führen wir folgenden Begriff ein:

**Definition 7 (Reale Basisdimension)**

Es sei  $x(t, x_0) \in \mathcal{C}^0(\omega)$  mit einer Basis  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$ . Ist jedoch  $x(t, x_0) \notin \mathcal{C}^0(\Omega)$  für jede Basis  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_q)$  mit  $q < p$ , so heißt  $p = p^*$  die *reale Dimension der Frequenzbasis* der quasi-periodischen Lösung  $x(t, x_0)$ .

Die reale Dimension  $p^*$  beschreibt zugleich die Dimension der Menge  $\mathcal{M}$  in jedem ihrer Punkte. Dies kann folgendermaßen formuliert werden (vgl. Samoilenko (1991), S. 72ff.):

**Satz 8**

Es sei  $x(t, x_0) = F(\omega t) \in \mathcal{C}^r(\omega)$  mit  $r \geq 1$  und  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$  eine Frequenzbasis mit  $p$  Frequenzen. Dann ist

$$\text{rang } \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} = p^*, \quad \theta \in \mathbb{T}^p, \quad (16)$$

worin  $p^* \leq p$  die reale Dimension der Frequenzbasis von  $x(t, x_0)$  ist.

Insbesondere ist die reale Dimension  $p^*$  kleiner als die Dimension  $n$  des Phasenraumes und gibt die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten der Jacobi-Matrix  $\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta}$  an.

**Beispiel 9**

Beispiel 4(d) lieferte zum Anfangswert  $x_0 = (0, 1, 0, 1)^T$  die quasi-periodische Lösung  $x(t, x_0) = (\sin t, \cos t, \sin \pi t, \cos \pi t)^T$ . Mit der Frequenzbasis  $\omega = (\omega_1, \omega_2) = (1, \pi)$  lautet die Torusfunktion

$$F(\theta) = F(\theta_1, \theta_2) = (\sin \theta_1, \cos \theta_1, \sin \theta_2, \cos \theta_2)^T.$$

Die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

besitzt für alle  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$  den Rang 2, womit  $p^* = 2$  die reale Dimension der Frequenzbasis ist. ■

**3.** Die Abbildung  $F : \theta \rightarrow F(\theta)$  definiert nicht notwendig einen Homöomorphismus zwischen dem Standardtorus  $\mathbb{T}^p$  und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Das erkennt man leicht, wenn  $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^p)$  so gewählt wird, dass es bezüglich der Variablen  $\theta_1$  die Periodendauer  $2\pi/m$  mit ganzzahligem  $m \geq 2$  hat. Dann liefern zu  $\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_p^0) = (2\pi/m, 0, 0, \dots, 0)$  die  $m$  verschiedenen Punkte  $\theta^\mu = \theta + \mu\theta^0$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, m$ , ein und denselben Bildpunkt  $x = F(\theta^\mu) = F(\theta)$  auf  $\mathcal{M}$ . Die inverse Abbildung ist somit nicht eindeutig, da die Frequenzbasis von  $x(t, x_0)$  auf verschiedene Art gewählt werden kann. Wir führen deshalb den Begriff der maximalen Frequenzbasis ein:

**Definition 10 (Maximale Frequenzbasis)**

Es sei  $x(t, x_0) \in \mathcal{C}^0(\omega)$  mit einer Frequenzbasis  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$ . Dann ist  $\omega$  *maximal*, wenn für jede andere Frequenzbasis  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_q)$  eine  $(p, q)$ -Matrix  $P$  mit ganzzahligen Elementen existiert, so dass

$$\omega = P \Omega \quad \text{mit den Spaltenvektoren } \omega, \Omega$$

und  $\text{rang } P = p$  gilt.

Die Anzahl  $p^*$  der Frequenzen in einer maximalen Basis ist offenbar gleich der Dimension der realen Frequenzbasis der Lösung  $x(t, x_0)$ . Sind zwei Frequenzbasen  $\omega$  und  $\Omega$  maximal, so sind  $P$  und  $P^{-1}$  ganzzahlige Matrizen. Im periodischen Spezialfall besteht die maximale Basis aus der größten Frequenz  $\omega = 2\pi/T$  der Lösung  $x(t, x_0)$ , die durch die kleinste Periode  $T$  bestimmt wird. Die Frage nach der Existenz einer maximalen Frequenzbasis und der Eigenschaften von  $F$  beantwortet

**Satz 11**

Für jede quasi-periodische Lösung  $x(t, x_0) = F(\omega t) \in \mathcal{C}^0(\omega)$  der DGL (13) gilt:

- i. Die Funktion  $x(t, x_0)$  besitzt eine maximale Frequenzbasis.
- ii. Die Abbildung  $F : \theta \rightarrow F(\theta)$  definiert einen Homöomorphismus genau dann, wenn die Frequenzbasis  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$  maximal ist.
- iii. Ist darüber hinaus  $x(t, x_0) \in \mathcal{C}^r(\omega)$  mit  $r \geq 0$ , so ist die Menge  $\mathcal{M}$  (der Abschluss des Orbits durch  $x_0$ )  $\mathcal{C}^r$ -homöomorph zu einem  $p$ -Torus, wobei  $p$  die reale Dimension der Frequenzbasis der Lösung  $x(t, x_0)$  ist.

Die Menge  $\mathcal{M}$ , die  $\mathcal{C}^r$ -homöomorph zu einem  $p$ -Torus ist, werden wir als  $p$ -dimensionale *toroidale Mannigfaltigkeit mit  $\mathcal{C}^r$ -Glattheit  $r$*  bezeichnen bzw. kürzer als  $\mathcal{C}^r$ -glatten  $p$ -Torus.

## 2.3 Transformation in Toruskoordinaten

Wir wollen nun voraussetzen, dass das autonome DGL-System (13) eine quasi-periodische Lösung

$$x(t, x_0) = F(\omega t) \quad \text{mit Torusfunktion} \quad F \in \mathcal{C}^{s+1}(\mathbb{T}^p), \quad s \geq 0, \quad (17)$$

besitzt, die der Rangbedingung (16) mit  $p^* = p$  genügt. Dann stellt  $p$  die reale Dimension der Frequenzbasis  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$  dar. Nach Satz 11 kann daraus eine maximale Basis gewonnen werden. Um die  $p$ -dimensionale Torusmannigfaltigkeit global in der Form

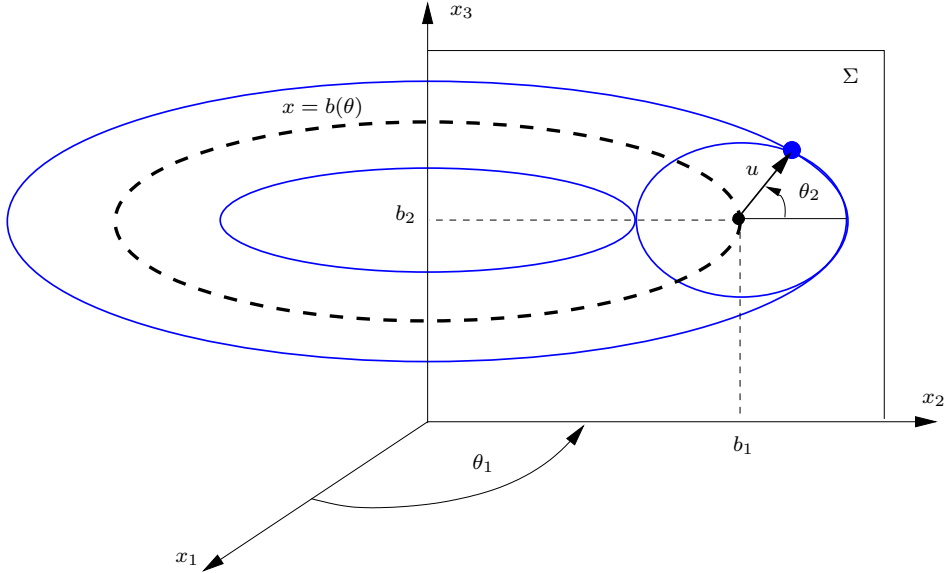
$$\mathcal{M} = \{x \mid x = F(\theta), \theta \in \mathbb{T}^p\} \quad (18)$$

parametrisieren zu können, gehen wir von kartesischen Koordinaten  $x = (x_1, \dots, x_n)$  zu den  $p$  Toruskoordinaten  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  und den  $q$  lokalen (radialen) Koordinaten  $u = (u_1, \dots, u_q)$  mit  $p + q = n$  über.  $(\theta, t)$  werden wir desweiteren als *Toruskoordinaten* bezeichnen. Zahlreiche bekannte Koordinatentransformationen lassen sich dann in der allgemeinen Form

$$x = B(\theta)u + b(\theta) \quad (19)$$

mit hinreichend glatten und bezüglich jeder  $\theta$ -Komponente  $2\pi$ -periodischen Abbildungen  $b : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $B : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$  darstellen. Typisch ist dies in folgenden Szenarien:

- Durchläuft das DGL-System eine Torus-Bifurkation, so garantiert das Bifurkations-Theorem von Neimark-Sacker die Existenz eines invarianten Torus  $\mathcal{M}$ , wie dies in Vogt (2010b) veranschaulicht wird. Der Orbit der instabilen periodischen Lösung kann durch  $b(\theta)$  beschrieben werden. In Abbildung 5 wird der dreidimensionale Fall mit dem Poincaré-Schnitt  $\Sigma$  veranschaulicht.



**Abb. 5** Koordinatentransformation  $x = B(\theta)u + b(\theta)$  in  $\mathbb{R}^3$ : kartesische Koordinaten  $x = (x_1, x_2, x_3)$  und Toruskoordinaten  $(\theta, u)$  mit  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ ,  $u = (u_1)$

- Wird eine Toruslösung bezüglich eines Parameters  $\lambda$  fortgesetzt, so steht für  $\lambda_0$  ein invarianter „Referenztorus“  $\mathcal{M}_0$  mit Parametrisierung  $b(\theta)$  zur Verfügung, dessen Normalraum  $N_{(\theta, u)}\mathcal{M}_0$  durch die  $q$  Spaltenvektoren von  $B(\theta)$  aufgespannt wird. Der zum Parameter  $\lambda$  gesuchte benachbarte Torus  $\mathcal{M}$  kann nun durch (19) parametrisiert werden, wie dies der Poincaré-Schnitt  $\Sigma$  in Abbildung 6 für  $n = 3$  zeigt.

Wir suchen nun eine Darstellung des invarianten  $p$ -Torus  $\mathcal{M}$  mit der Torusfunktion  $u : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Wenden wir die Transformation (19) auf eine Lösung der DGL an, d. h. setzen wir  $x(t) = B(\theta(t))u(t) + b(\theta(t))$ , so geht bei Differenziation in  $(\theta, u)$ -Koordinaten

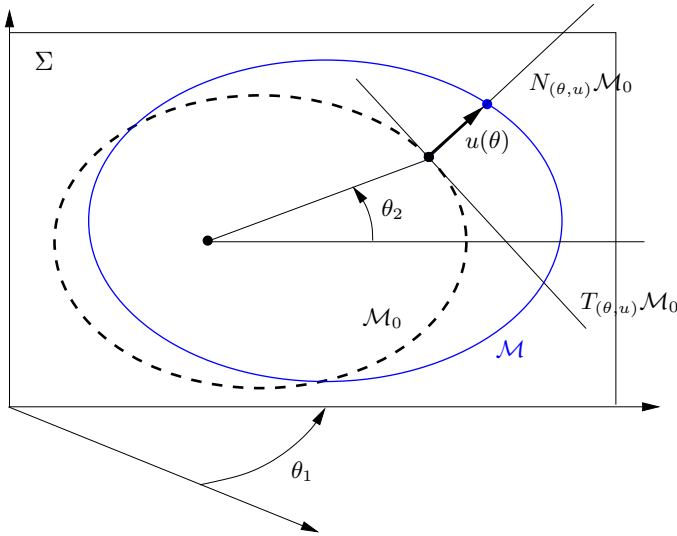
$$\mathcal{M} = \{(\theta, u) \mid u = u(\theta), \theta \in \mathbb{T}^p, u \in \mathbb{R}^q\} \subset \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q \quad (20)$$

nach  $t$  die DGL (13) in die Form

$$(B'(\theta)u + b'(\theta), B(\theta)) \begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix} = f(B(\theta)u + b(\theta))$$

über, woraus wir unter der zusätzlichen Voraussetzung  $\det(B'(\theta)u + b'(\theta), B(\theta)) \neq 0$  das transformierte System

$$\begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix} = [B'(\theta)u + b'(\theta), B(\theta)]^{-1} f(B(\theta)u + b(\theta)),$$



**Abb. 6** Koordinatentransformation in  $\mathbb{R}^3$ : Fortsetzung des Referenztorus  $\mathcal{M}_0$  (schwarz) zu  $\mathcal{M}$  (blau) mit Toruskoodinaten  $(\theta, u)$  mit  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ ,  $u = (u_1)$ ; die Abbildung zeigt den Poincaré-Schnitt  $\Sigma$

erhalten. In partitionierter Form lautet die DGL in Toruskoodinaten  $(\theta, u) \in \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \Omega(\theta, u) & \text{mit} & \quad \Omega(\theta, u) := L_1(\theta, u)f(B(\theta)u + b(\theta)) \\ \frac{du}{dt} &= R(\theta, u) & \text{mit} & \quad R(\theta, u) := L_2(\theta, u)f(B(\theta)u + b(\theta)). \end{aligned} \quad (21)$$

$L_1(\theta, u)$  bezeichnet dabei die aus den ersten  $p$  Zeilen der Inversen  $C(\theta, u)^{-1}$  von

$$C(\theta, u) := (B'(\theta)u + b'(\theta), B(\theta)) \quad \text{mit} \quad \det(C(\theta, u)) \neq 0 \quad (22)$$

bestehende Matrix und  $L_2(\theta, u)$  entsprechend die aus den verbleibenden  $q$  Zeilen von  $C(\theta, u)^{-1}$  bestehende Matrix. Die vorausgesetzte  $2\pi$ -Periodizität von  $B(\theta)$ ,  $b(\theta)$  und  $u(\theta)$  bezüglich jeder  $\theta$ -Komponente überträgt sich unmittelbar auf  $\Omega(\theta, u)$  und  $R(\theta, u)$ . Wegen der Regularität von  $C(\theta, u)$  sind diese Funktionen zudem  $\mathcal{C}^s$ -glatt, wenn  $B(\theta)$  und  $b(\theta)$  als  $\mathcal{C}^{s+1}$ -glatt vorausgesetzt werden. Die Regularität der  $n \times n$ -Matrix  $C(\theta, u)$  auf  $\mathbb{T}^p \times D$ ,  $D \subset \mathbb{R}^q$  muss allerdings im konkreten Fall stets verifiziert werden.

### Beispiel 12

Betrachten wir das System zweier schwach linear gekoppelter Van-der-Pol-Oszillatoren

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - e(1 - x_1^2) \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= b(x_2 - x_1) \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} - e(1 - x_2^2) \frac{dx_2}{dt} + (1 + d)x_2 &= b(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

mit Dämpfung  $e > 0$ , Verzerrung  $d \geq 0$  und mit  $b \geq 0$  als Parameter für die lineare Kopplung der beiden Systeme. Bei fehlender Kopplung – d.h. falls  $b = 0$  ist – besitzt jeder der beiden Van-der-Pol-Oszillatoren einen asymptotisch stabilen Grenzyklus  $S_1$



bzw.  $S_2$  mit Basisfrequenzen  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$ . Das kartesische Produkt  $S_1 \times S_2$  der beiden Grenzzyklen ist ein (asymptotisch stabiler) 2-dimensionaler Torus  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^4$ . Die Bewegung auf  $\mathcal{M}$  ist quasi-periodisch bei inkommensurablen Frequenzen  $\omega_1, \omega_2$ , andernfalls ist sie periodisch. Das entkoppelte System ( $b = 0$ ) ist strukturstabil in  $\mathbb{R}^4$  (vgl. Broer et al. (1996)), weshalb der invariante Torus bei kleinen Störungen wie z. B. einer schwachen Kopplung oder einer Vergrößerung der Verzerrung  $d$  erhalten bleibt. Nach Überführung in ein DGL-System 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -x_1 + b(x_2 - x_1) + e(1.0 - x_1^2)y_1 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -x_2 - dx_2 + b(x_1 - x_2) + e(1.0 - x_2^2)y_2\end{aligned}\tag{23}$$

bieten sich deshalb Polarkoordinaten zur Transformation in das  $(\theta, u)$ -System mit

$$x_i = u_i \cos \theta_i, \quad y_i = -u_i \sin \theta_i, \quad i = 1, 2\tag{24}$$

an, wobei  $u_1 > 0, u_2 > 0$  gilt. Die Transformation (19) lautet dann mit  $b(\theta) = 0$

$$x = B(\theta)u + b(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

woraus wir die Matrixfunktion

$$C(\theta, u) = (B'(\theta)u + b'(\theta), B(\theta)) = \begin{pmatrix} -u_1 \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ -u_1 \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & -u_2 \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \\ 0 & -u_2 \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

erhalten. Deren Determinante ist  $\det(C(\theta, u)) = -u_1 u_2 < 0$  für alle  $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$ . Das partitionierte System (21) mit  $p = q = 2$  bekommt dann die recht komplizierte Form

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= 1.0 + \frac{b}{u_1} c_{12} \cos \theta_1 + \frac{e}{2} c_1 \sin 2\theta_1 &=: \Omega_1(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \\ \dot{\theta}_2 &= 1.0 + d \cos^2 \theta_2 - \frac{b}{u_2} c_{12} \cos \theta_2 + \frac{e}{2} c_2 \sin 2\theta_2 &=: \Omega_2(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \\ \dot{u}_1 &= bc_{12} \sin \theta_1 + ec_1 u_1 \sin^2 \theta_2 &=: R_1(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \\ \dot{u}_2 &= \frac{d}{2} u_2 \sin 2\theta_2 - bc_{12} \sin \theta_2 + ec_2 u_2 \sin^2 \theta_2 &=: R_2(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2)\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen  $c_{12} := u_1 \cos \theta_1 - u_2 \cos \theta_2$ ,  $c_1 := 1.0 - u_1^2 \cos^2 \theta_1$  und  $c_2 := 1.0 - u_2^2 \cos^2 \theta_2$ . ■

**Bemerkung 13 (Existenz und Eindeutigkeit)**

In der Standardliteratur sind relativ wenige Aussagen über die *Existenz und Eindeutigkeit* von Toruslösungen dynamischer Systeme zu finden. Für lineare Systeme bezüglich  $u$  in der partitionierten Form

$$\frac{d\theta}{dt} = a(\theta), \quad \frac{du}{dt} = P(\theta)u + f(\theta) \quad (25)$$

mit  $a, P, f \in C^r(\mathbb{T}^p)$ ,  $r \geq 1$ , und  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_q)$  werden z. B. bei Samoilenko (1991) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines invarianten Torus bewiesen. Mit Hilfe der Störungstheorie werden dort auch nichtlineare Systeme der Gestalt

$$\frac{d\theta}{dt} := a(\theta, u, \varepsilon), \quad \frac{du}{dt} = P(\theta, u, \varepsilon)u + f(\theta, \varepsilon) \quad (26)$$

betrachtet, wobei  $a, P$  und  $f$  periodische Funktionen in  $\theta_j$ ,  $j = 1(1)p$ , mit Periode  $2\pi$  sind, die stetig bezüglich  $(\theta, u, \varepsilon)$  im Bereich  $\|u\|_0 \leq d$ ,  $\theta \in \mathbb{T}^p$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  sind. Weiterhin gelte  $f(\theta, 0) = 0$  für alle  $\theta \in \mathbb{T}^p$ , d. h. es existiere ein trivialer invarianter Torus  $u(\theta) = 0$ ,  $\theta \in \mathbb{T}^p$ , von System (26) für  $\varepsilon = 0$ . Dann garantiert Samoilenko (1991) unter zusätzlichen Voraussetzungen an  $a, P, f$  und an das für  $\varepsilon = 0$  entstehende DGL-System die Existenz eines invarianten Torus für alle  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  mit hinreichend kleinem  $\varepsilon_0$ . Diese Aussage kann z. B. bei schwach gekoppelten Schwingungssystemen mit hinreichend kleinem Kopplungsparameter  $\varepsilon$  Anwendung finden, wobei die Überprüfung der entsprechenden Voraussetzungen in der Praxis schwierig sein dürfte. ■

Ein einfaches Beispiel gekoppelter Schwingungssysteme entsteht, wenn zwei nichtlineare DGL mit periodischen Lösungen wie bei Lorenz (1991) betrachtet werden. Das dynamische System in  $(\theta, u)$ -Koordinaten

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{du}{dt} = u(1 - u^2) \quad \text{mit Frequenz } \omega > 0 \quad (27)$$

besitzt zu beliebigem  $u(0) > 0$  eine Lösung mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1$ . Also ist die Menge

$$\mathcal{M} = \{(\theta, u) \mid u = u(\theta) = 1, \theta \in \mathbb{S}^1\} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$

eine attraktive invariante Mannigfaltigkeit dieser DGL. Wir koppeln nun zwei Systeme des Typs (27) und führen dazu eine Kopplungsfunktion  $g : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  ein, die als  $C^\infty$ -glatt vorausgesetzt wird. Mit dem Kopplungsparameter  $\varepsilon$  erhalten wir die Drastellung in partitionierter Form

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 & + & \varepsilon g_1(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 & + & \varepsilon g_2(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \\ u_1 &= u_1(1 - u_1^2) & + & \varepsilon g_3(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \\ u_2 &= u_2(1 - u_2^2) & + & \varepsilon g_4(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2). \end{aligned} \quad (28)$$

Mit den *Toruskoodinaten*  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  und  $u = (u_1, u_2)$  besitzt dieses System bei fehlender Kopplung ( $\varepsilon = 0$ ) die invariante Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M}_0 = \{(\theta, u) \mid u_1(\theta) = u_2(\theta) = 1, \theta \in \mathbb{T}^2\} \subset \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad (29)$$

als kartesisches Produkt der zwei invarianten Einheitskreise.  $\mathcal{M}_0$  ist damit diffeomorph zum Standard-2-Torus  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Orbits auf der Mannigfaltigkeit sind quasi-periodisch, falls die Basisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  rational unabhängig sind; andernfalls liegt ein periodischer Orbit vor.

Was geschieht nun mit dem invarianten Torus  $\mathcal{M}_0$  bei vorhandener Kopplung? Für kleine Kopplung  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_s$  liefert die analytische Störungstheorie eine Existenzaussage für den gestörten Torus  $\mathcal{M}_\varepsilon$  (vgl. Lorenz (1991)):

#### Satz 14

Zu jedem  $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$  existieren eine Schranke  $\varepsilon_s > 0$  und eine  $\mathcal{C}^s$ -glatte Funktion  $u_s : \mathbb{T}^2 \times (-\varepsilon_s, \varepsilon_s) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , mit der die Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{(\theta, u) \mid u = u_s(\theta, \varepsilon), \theta \in \mathbb{T}^2, |\varepsilon| \leq \varepsilon_s\}$$

invariant unter dem System (28) für  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_s$  ist.

Bei weiterem Anwachsen der Kopplung  $|\varepsilon|$  muss allerdings mit dem Zusammenbruch des Torus gerechnet werden, der dann in der Regel in eine periodische Bewegung übergeht. Um die Klasse der numerisch zu behandelnden Probleme nicht unnötig einzuschränken, wollen wir für allgemeine nichtlineare Systeme in partitionierter Form (21) die folgende Voraussetzung treffen:

#### Voraussetzung 15 (Existenz)

System (21) besitzt einen lokal eindeutigen invarianten  $p$ -Torus  $\mathcal{M}$ , der in der Form (20) mit einer  $\mathcal{C}^s(\mathbb{T}^p)$ -Funktion  $u(\theta)$  parametrisierbar ist ( $s \geq 2$ ).

Für derartige  $p$ -Tori lassen sich Stabilitätsbegriffe einführen, die sich an der Ljapunov-Stabilität von Orbits orientieren, nun aber den gesamten Torus  $\mathcal{M}$  betreffen.

Die euklidische Länge des Vektors  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$  auf dem Torus  $\mathbb{T}^p$  sei durch

$$\|\theta\|_{\mathbb{T}^p} = \min \|\theta \bmod 2\pi\| \quad (30)$$

definiert, und  $(\theta_t, u_t)$  sei die Lösung des partitionierten Systems (21) mit den Anfangswerten  $\theta(0) = \theta_0$  und  $u(0) = u_0$ . Den Abstand  $d_t$  eines Punktes  $(\theta_t, u_t)$  vom Torus  $\mathcal{M}$  in  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q$  führt Samoilenko (1991) in der Form

$$d_t := \min_{\theta \in \mathbb{T}^p} \{\|\theta_t - \theta\|_{\mathbb{T}^p}^2 + \|u_t - u(\theta)\|^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

ein. Damit lassen sich folgende Begriffe definieren:

**Definition 16 (Stabilität von Tori)**

- i. Ein invarianter Torus von (21) heißt *stabil*, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ , existiert, so dass für alle Lösungen  $(\theta_t, u_t)$  von (21) mit  $d_0 < \delta$  gilt:  $d_t < \varepsilon$  für alle  $t \geq 0$ .
- ii. Ein invarianter Torus heißt *asymptotisch stabil*, wenn er stabil ist und ein  $\delta_0 > 0$ ,  $\delta_0 \in \mathbb{R}$ , existiert, so dass für alle Lösungen  $(\theta_t, u_t)$  von (21) mit  $d_0 < \delta_0$  gilt:  $d_t < \delta_0$  für alle  $t \geq 0$  und

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_t = 0. \quad (32)$$

Ein invarianter Torus der nicht stabil ist, wird als instabil (unstable) bezeichnet. Eine genauere Aussage bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit in (32) liefert folgende

**Definition 17 (Exponentielle Stabilität)**

Ein invarianter Torus heißt *exponentiell stabil*, falls er stabil ist und ein  $\delta_1 > 0$  existiert, so dass für jede Lösung  $(\theta_t, u_t)$  von (21) mit  $d_0 < \delta_1$  die Ungleichung

$$d_t \leq K \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} d_{t_0}, \quad t \geq t_0 \quad (33)$$

für positive, von  $t_0$  und  $d_0$  unabhängige Konstanten  $\gamma$  und  $K$  und  $t_0 \in [0, \infty)$  erfüllt ist.

Aus dieser Definition folgt sofort, dass jeder exponentiell stabile Torus auch asymptotisch stabil ist. Stabilitätsnachweise anhand dieser Definitionen sind bei konkreten DGL-Systemen (21) meist nicht möglich. Die in Vogt (2010a) und Vogt (2010b) benutzten *algebraischen Stabilitätskriterien* mittels der Eigenwerte der

- Jacobi-Matrix im Falle von Gleichgewichtslösungen bzw.
- Monodromiematrix (Floquet-Multiplikatoren) für periodische Lösungen

stehen bei invarianten  $p$ -Tori allerdings nicht zur Verfügung.

### 3 Parametrisierung invarianter Tori

Nachfolgend wird eine Bestimmungsgleichung für invariante  $p$ -Tori hergeleitet, die es gestattet, diese Mannigfaltigkeiten direkt und weitgehend unabhängig von den darauf verlaufenden Orbits zu approximieren. Dieser Zugang erweist sich speziell bei 2-Tori praktikabel und soll dafür algorithmiert werden.

### 3.1 Eine Invarianzgleichung für invariante Tori

Nach der Transformation in  $(\theta, u)$ -Koordinaten wollen wir eine Bestimmungsgleichung für den invarianten Torus

$$\mathcal{M} = \{(\theta, u) \mid u = u(\theta), \theta \in \mathbb{T}^p, u \in \mathbb{R}^q\} \subset \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q \quad (34)$$

gewinnen. Diese Mannigfaltigkeit ist jedoch genau dann invariant unter dem Fluss des Systems

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega(\theta, u), \quad \frac{du}{dt} = R(\theta, u),$$

wenn zu jedem Punkt  $(\theta, u) \in \mathcal{M}$  der Vektor  $(\Omega(\theta, u), R(\theta, u))^T \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  im Tangentialraum  $T_{(\theta, u)}\mathcal{M}$  von  $\mathcal{M}$  liegt. Da dieser Unterraum durch die  $p$  Vektoren  $t_1, t_2, \dots, t_p$  mit

$$t_k = \left( \underbrace{0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0}_{k\text{-ter Einheitsvektor}}, \frac{\partial u_1}{\partial \theta_k}, \dots, \frac{\partial u_q}{\partial \theta_k} \right)^T \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

aufgespannt wird, stellen wir  $(\Omega(\theta, u), R(\theta, u))^T$  als Linearkombination dieser Vektoren

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k(\theta, u) t_k = \begin{pmatrix} \Omega(\theta, u) \\ R(\theta, u) \end{pmatrix} \quad \text{mit Koeffizientenfunktionen } \alpha_k(\theta, u)$$

dar. Einsetzen der  $t_k$  liefert unmittelbar  $\alpha_k(\theta, u) = \Omega_k(\theta, u)$  für  $k = 1(1)p$ . Die zu bestimmende Funktion  $u = (u_1, \dots, u_q) : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  löst damit das *System partieller Differenzialgleichungen (PDGL) 1. Ordnung* mit  $q$  Gleichungen

$$\sum_{k=1}^p \Omega_k(\theta, u) \frac{\partial u}{\partial \theta_k} = R(\theta, u), \quad \theta \in \mathbb{T}^p. \quad (35)$$

Da sowohl die Koeffizientenfunktionen  $\Omega_k(\theta, u)$ ,  $k = 1(1)p$ , als auch die rechten Seiten  $R_k(\theta, u)$ ,  $k = 1(1)q$ , von den Größen  $\theta_1, \dots, \theta_p, u_1, \dots, u_q$  abhängen können, ist das System *quasilinear*. Zudem sind die skalaren Koeffizientenfunktionen  $\Omega_k(\theta, u)$  in allen  $q$  Gleichungen identisch, so dass (35) ein *PDGL-System mit gleichem Hauptteil* darstellt.

Gemäß der Theorie partieller DGL (vgl. z. B. Courant und Hilbert (1968)) ist dieses PDGL-System dem *charakteristischen DGL-System*

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_j}{dt} &= \Omega_j(\theta, u) \quad , \quad j = 1(1)p \\ \frac{du_k}{dt} &= R_k(\theta, u) \quad , \quad k = 1(1)q \end{aligned} \quad (36)$$

äquivalent. Dies bedeutet insbesondere, dass jede  $\mathcal{C}^1$ -Torusmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  unter dem Vektorfeld  $(\Omega(\theta, u), R(\theta, u))^T$  genau dann invariant ist, wenn die  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $u(\theta)$  dem quasilinearen System (35) für  $\theta \in \mathbb{T}^p$  genügt. Beschränken wir  $\theta$  auf das  $p$ -dimensionale Intervall  $[0, 2\pi]^p$ , so sind periodische Randbedingungen für die Torusfunktion  $u(\theta)$

$$u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j, \dots, \theta_p) = u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j + 2\pi, \dots, \theta_p), \quad j = 1(1)p \quad (37)$$

hinzuzufügen. Der gesuchte  $p$ -Torus  $\mathcal{M}$  kann dann als numerische Lösung des Randwertproblems (35),(37) bestimmt werden.

### Beispiel 18

1. Das System zweier linear gekoppelter Van-der-Pol-Oszillatoren aus Beispiel 12 führt mit den dort definierten Funktionen  $\Omega_1, \Omega_2$  und  $u_1, u_2$  auf das PDGL-System

$$\begin{aligned} \Omega_1(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \Omega_2(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} &= R_1(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \\ \Omega_1(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} + \Omega_2(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} &= R_2(\theta_1, \theta_2, u_1, u_2) \end{aligned} \quad (38)$$

mit den Torusbedingungen

$$\begin{aligned} u_1(\theta_1, \theta_2) &= u_1(\theta_1 + 2\pi, \theta_2), & u_2(\theta_1, \theta_2) &= u_2(\theta_1 + 2\pi, \theta_2), \\ u_1(\theta_1, \theta_2) &= u_1(\theta_1, \theta_2 + 2\pi), & u_2(\theta_1, \theta_2) &= u_2(\theta_1, \theta_2 + 2\pi). \end{aligned}$$

2. Das einfache partitionierte System (28) liefert ebenfalls eine derartige quasilineare PDGL, die im entkoppelten Fall ( $\varepsilon = 0$ ) zur Darstellung

$$\begin{aligned} \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2} &= u_1(1 - u_1^2) \\ \omega_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta_2} &= u_2(1 - u_2^2) \end{aligned} \quad (39)$$

führt. Die Lösung  $u_1(\theta_1, \theta_2) = u_2(\theta_1, \theta_2) = 1$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]^2$  genügt trivialerweise den Torusbedingungen. ■

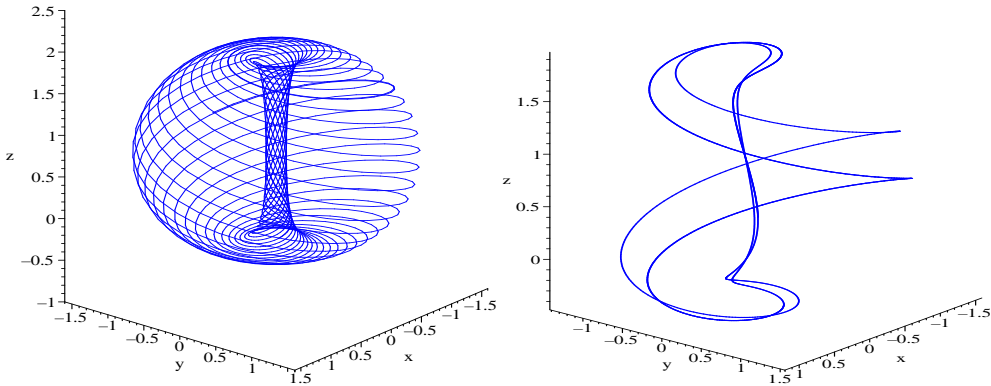
Eine Approximation von  $\mathcal{M}$  entlang der Charakteristiken ist zwar möglich, indem wir das charakteristische System (36) als Anfangswertproblem integrieren. Dieser Zugang besitzt jedoch beträchtliche Nachteile in folgenden Fällen:

- Ist der Torus kein Attraktor, so erhalten wir numerisch keine auf  $\mathcal{M}$  verlaufenden Orbits. Auch bei „schwach“ attraktiven Tori ist der Zugang ineffizient.
- Sind die Basisfrequenzen rational abhängig, so ist der Torus nicht ergodisch und die berechneten quasi-periodischen bzw. periodischen Orbits füllen den Torus nicht dicht.

Durch die – numerisch zwar ungleich aufwändigere – Integration der PDGL mit den Torusbedingungen können wir uns von diesen Einschränkungen weitgehend befreien.

**Beispiel 19**

Für das System von W. F. Langford aus Vogt (2010b) mit den Konstanten  $\omega = 3.5$ ,  $\varrho = 0.25$ ,  $\beta = 0.7$  und dem Kontrollparameter  $\varepsilon$  liefert die Integration der gewöhnlichen DGL die in Abbildung 7 dargestellten Orbits. Während für  $\varepsilon = 0$  der Orbit den ergodischen Torus dicht füllt, gewinnen wir bei  $\varepsilon = 0.06$  keine wesentliche Information über die Mannigfaltigkeit. ■



**Abb. 7** Langford-System aus Vogt (2010b): Orbits für  $\varepsilon = 0$  (links) und  $\varepsilon = 0.06$  (rechts)

Die numerische Lösung der  $p$ -dimensionalen PDGL (35) stellt für  $p \geq 2$  und große Systemdimension  $q$  ein ernstes Problem dar. In den vergangenen Jahren wurden unterschiedliche Ansätze entwickelt und im Falle von 2-Tori erfolgreich erprobt. So erfolgt die Lösung der Torusgleichungen (35), (37) auf  $\mathbb{T}^p$  durch

- *Finite-Differenzen-Methoden* auf einem diskretisierten Torus  $\mathbb{T}_h^p$  mit Schrittweiten  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$  im Falle  $p = 2$  in Arbeiten von Dieci et al. (1991), Dieci und Bader (1992) sowie Moore (1996),
- eine *Charakteristikenmethode für hyperbolische DGL-Systeme* im Falle  $p = 2$  bei Dieci und Lorenz (1995). Die Methode kann als diskretisierte Version der sogenannten Graph-Transformation interpretiert werden.
- Die Lösung der Torusgleichungen auf  $\mathbb{T}^{p-1} \times [0, 2\pi]$  wird von Bernet und Vogt (1994) sowie Bernet (1995) mit einem *verallgemeinerten Schießverfahren für hyperbolische PDGL* bewältigt.
- Schließlich wurden auch *Fouriermethoden* auf  $\mathbb{T}^p$  bei Mingyou et al. (1997) sowie Chen und Leung (1998) mit Erfolg eingesetzt.

Um eine Lösung  $u(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$  der  $p$ -dimensionalen PDGL (35) numerisch mit vertretbarem Aufwand zu erhalten, ist eine Problemreduktion auf einen  $(p - 1)$ -dimensionalen Torus wünschenswert, weil sich dadurch der Rechenaufwand erheblich verringern lässt. Insbesondere geht im praxisrelevanten Fall  $p = 2$  die Aufgabe in eine gewöhnliche DGL über, für die umfangreiche Verfahren und Software verfügbar sind.

Wir treffen dazu folgende Voraussetzung, die in der Regel häufig erfüllt ist:

**Voraussetzung 20**

*Es existiert ein  $j \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq j \leq p$ , so dass die Funktion  $\Omega_j(\theta, u) \neq 0$  für alle  $(\theta, u) \in \mathbb{T}^p \times D$  mit  $D \subset \mathbb{R}^q$  ist.*

Durch einfaches Umm Nummerieren lässt sich stets  $j = p$  erreichen. Wir dividieren sämtliche Gleichungen der PDGL (35) durch  $\Omega_p(\theta, u)$ , womit in dieser „normalisierten“ Gleichung nunmehr  $\Omega_p(\theta, u) \equiv 1$  ist. Somit kann  $\theta_p := t$  gesetzt und mit der Zeitvariablen  $t$  identifiziert werden. Die verbleibenden  $p - 1$  Variablen bezeichnen wir wiederum abkürzend mit  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{p-1})$  und erhalten so die *normalisierte Darstellung der PDGL*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p-1} \Omega_j(\theta, t, u) \frac{\partial u}{\partial \theta_j} = R(\theta, t, u) \quad (40)$$

mit den durch  $\Omega_p(\theta, t, u)$  dividierten Funktionen für  $j = 1, 2, \dots, p - 1$

$$\Omega_j(\theta, t, u) := \frac{\Omega_j(\theta, t, u)}{\Omega_p(\theta, t, u)} \quad \text{und} \quad R(\theta, t, u) := \frac{R(\theta, t, u)}{\Omega_p(\theta, t, u)}.$$

Die Torusbedingungen (37) lauten nunmehr entsprechend diesen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j, \dots, \theta_{p-1}, t) &= u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j, \dots, \theta_{p-1}, t + 2\pi), \\ u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j, \dots, \theta_{p-1}, t) &= u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j + 2\pi, \dots, \theta_{p-1}, t), \end{aligned} \quad (41)$$

für  $j = 1(1)p - 1$ .

**Periodisch erregte Systeme**

Eine wesentliche Problemklasse bilden die bereits in Vogt (2010b) ausführlich betrachteten nichtautonomen dynamischen Systeme

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (42)$$

mit periodischer Erregung in  $t$ . Nach einer eventuellen Zeittransformation kann die Periode stets mit  $T = 2\pi$  vorausgesetzt werden, d. h.  $f(x, t + 2\pi) = f(x, t)$  für alle  $(x, t)$ . Identifizieren wir  $\theta_p$  mit  $t$ , so ergibt sich nach Transformation ein partitioniertes System

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \Omega_i(\theta, t, u), \quad i = 1(1)p - 1 \\ \dot{\theta}_p &= 1 \\ \dot{u} &= R(\theta, t, u) \end{aligned} \quad (43)$$

für  $(\theta, t) \in \mathbb{T}^p$ . Hieraus folgt unmittelbar die normalisierte Darstellung (40), die damit bei periodisch erregten DGL stets erreicht wird.



**Beispiel 21**

Das System von Philippow und Büntig (1992) eines subharmonisch reagierenden elektrischen Netzwerkes

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x} + x + b(4x^3 - 3x) = B \cdot \cos 3t \quad (44)$$

mit Parametern  $\varepsilon, b, B > 0$  und Erregungsperiode  $T_0 = \frac{2\pi}{3}$  wurde bereits in Vogt (2010b) auf 3-fach subharmonische periodische Lösungen mit  $T = 3T_0 = 2\pi$  hin untersucht. Nun wollen wir für verschiedene Werte der Erregungsamplitude  $B$  analysieren, ob (i) diese Lösungen auf invarianten 2-Tori liegen und (ii) quasi-periodische Orbits auftreten.

Die DGL 2. Ordnung kann leicht in das System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \varepsilon(1 - x^2 - y^2)y - x - b(4x^3 - 3x) + B \cos 3t \quad , \end{aligned}$$

überführt werden. Wir transformieren dieses periodisch erregte System mittels

$$x = u \cos \theta_1, \quad y = u \sin \theta_1$$

in Polarkoordinaten und setzen  $t = \theta_2$ . Das entstandene partitionierte System

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \varepsilon(1 - u^2) \sin \theta_1 \cos \theta_1 - 1 - b \cos^2 \theta_1 (4u^2 \cos^2 \theta_1 - 3) + \frac{1}{u} B \cos \theta_1 \cos 3\theta_2 \\ &= \Omega(\theta_1, \theta_2, u) \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= 1 \\ \frac{du}{dt} &= \varepsilon(1 - u^2)u \sin^2 \theta_1 - b \sin \theta_1 (4u^3 \cos^3 \theta_1 - 3u \cos \theta_1) + B \sin \theta_1 \cos 3\theta_2 \\ &= R(\theta_1, \theta_2, u) \end{aligned} \quad (45)$$

besitzt offenbar die Gestalt (43) mit  $p = 2$  und  $q = 1$ . Der im Parameterbereich  $0 \leq \varepsilon \leq 5.0$ ,  $0 < B \leq 1.0$  gesuchte invariante 2-Torus wird somit durch die PDGL

$$\frac{\partial u}{\partial \theta_2} + \Omega(\theta_1, \theta_2, u) \frac{\partial u}{\partial \theta_1} = R(\theta_1, \theta_2, u) \quad (46)$$

mit den in (45) erhaltenen Funktionen  $\Omega, R$  und den Torusbedingungen

$$u(\theta_1, \theta_2) = u(\theta_1 + 2\pi, \theta_2), \quad u(\theta_1, \theta_2) = u(\theta_1, \theta_2 + 2\pi) \quad (47)$$

beschrieben. Die Gleichung (46) ist bereits in normalisierter Darstellung (40), so dass keine weiteren Umformungen notwendig sind. ■

### 3.2 Basisdiskretisierungen von 2-Tori

Wenden wir uns nun der numerischen Lösung des Problems (40) mit Periodizitätsbedingungen (41) zu. Wenn wir – wie bei partiellen DGL üblich –  $t$  als „Zeitvariable“ und  $\theta$  als „Ortsvariablen“ auf dem Grundgebiet  $D = [0, T]^p$  mit  $T = 2\pi$  interpretieren, so stellt die PDGL ein quasilineares hyperbolisches System 1. Ordnung dar, dessen Lösungen allerdings die Randbedingungen für  $j = 1(1)p - 1$

$$\begin{aligned} u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, 0, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{p-1}, t) &= u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, T, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{p-1}, t), \\ \text{sowie} \quad u(\theta_1, \dots, \theta_{p-1}, 0) &= u(\theta_1, \dots, \theta_{p-1}, T) \end{aligned} \quad (48)$$

auf dem Rand  $\partial D$  erfüllen müssen. Dazu fassen wir bei festem Wert  $t \in \mathbb{T}^1$  die Funktion  $u(\theta, t)$  als Element des Banach-Raumes  $C^r$ -glatter Torusfunktionen in  $p - 1$  Variablen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_r &= \{v \in C^r(\mathbb{T}^{p-1}, \mathbb{R}^q) \mid u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{p-1}, t) = \\ &= u(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j + T, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{p-1}, t), j = 1(1)p - 1\} \end{aligned}$$

mit  $r \geq 2$  auf und bezeichnen für festes  $t$  die Elemente dieses Funktionenraumes mit  $v(t) := u(\theta, t)$ . Sodann führen wir den Differenzialoperator  $\mathcal{F} : \mathcal{B}_r \times \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathcal{B}_s$  mit  $1 \leq s < r$  ein, der durch

$$\mathcal{F}(v, t) := - \sum_{j=1}^{p-1} \Omega_j(\theta, t, u(\theta, t)) \frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta_j} + R(\theta, t, u(\theta, t)) \quad (49)$$

definiert wird. Beachten wir anschließend die Abhängigkeit der Abbildung  $v(t) = u(\theta, t)$  von  $t$ , so ergibt sich bei variablem Wert  $t$  eine Banach-Raum-wertige Funktion  $v \in C^r([0, T], \mathcal{B}_r)$ . Damit kann (40), (41) äquivalent durch das Zweipunkt-Randwertproblem (RWP)

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{F}(v, t), \quad v(0) = v(T) \quad \text{mit} \quad T = 2\pi \quad (50)$$

für  $v$  beschrieben werden. Die Periodizität der Funktionen  $\Omega$  und  $R$  bezüglich  $t$  überträgt sich wegen  $u \in C^r(\mathbb{T}^p)$  gemäß Voraussetzung auf den Operator  $\mathcal{F}$  mit

$$\mathcal{F}(v, t + T) = \mathcal{F}(v, t), \quad t \in \mathbb{T}^1, \quad (51)$$

womit (50) als periodisch erregtes System betrachtet werden kann.

#### Bemerkung 22

Da (50) wegen der Wahl der Banach-Räume  $\mathcal{B}_r$  lediglich eine Umformulierung der ursprünglichen Aufgabe darstellt, entspricht jede periodische Lösung  $v^*$  von (50) genau einer Toruslösung  $u^*$  von (40) und umgekehrt. Voraussetzung 15 sichert somit zusammen mit Voraussetzung 20 die Existenz einer periodischen Lösung  $v^*$  des Zweipunkt-Randwertproblems. Zudem folgt auch die stetige Differenzierbarkeit von  $\mathcal{F}$  bezüglich  $v$  und  $t$  im Sinne von Fréchet. ■

### Schießverfahren

Als Lösungsverfahren für das RWP (50) bietet sich die Rückführung dieser Aufgabe mittels des Schießverfahrens aus Vogt (2010b) an, das nun nicht im endlichdimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$ , sondern im unendlichdimensionalen Banach-Raum  $\mathcal{B}$  ausgeführt wird. Wir betrachten dazu das entsprechende Anfangswertproblem (AWP)

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{F}(v(t), t) \quad , \quad v(0) = s \in \mathcal{B}_r \quad (52)$$

für  $t \in [0, T]$ . Gesucht ist ein Element  $s^* \in \mathcal{B}_r$ , mit dem die Periodizitätsbedingung  $v(0) = v(T) = s^*$  erfüllt ist. Wir wollen vereinfachend davon ausgehen, dass für Anfangselemente  $s$  in einer hinreichend kleinen Umgebung  $\mathcal{U}(s^*)$  um  $s^*$  dieses AWP eine eindeutige Lösung auf ganz  $[0, T]$  besitzt. Bezeichnen wir mit  $v(t; s)$  diese Lösung für festes  $s \in \mathcal{B}_r$ , so lässt sich auf  $\mathcal{U}(s^*)$  die Abbildung

$$g(s) := v(T; s) - s, \quad g : \mathcal{U}(s^*) \subset \mathcal{B}_r \rightarrow \mathcal{B}_r \quad (53)$$

definieren. Offenbar ist  $v^*(0) = s^*$  genau dann eine gesuchte Anfangsbedingung von (52), wenn  $s^*$  die Gleichung

$$g(s) := v(T; s) - s = 0 \quad (54)$$

löst. Zur Bestimmung asymptotisch und speziell exponentiell stabiler Tori kann dafür die Fixpunktiteration (Picard-Iteration) eingesetzt werden. In diesen Fällen ergeben sich die Fixpunktiterierten in der Form

$$s^{(k+1)} = v(T; s^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (55)$$

Nach Diskretisierung des Operators  $\mathcal{F}$  entstehen – insbesondere bei 3-Tori – Probleme großer Dimension, wofür Newton-Verfahren sehr aufwändig werden. Deshalb wird von Bernet und Vogt (1994) für die Bestimmung exponentiell stabiler Tori die wesentlich aufwandsärmere Fixpunktiteration empfohlen.

Ist der Torus nicht asymptotisch stabil, so divergiert im Allgemeinen die Fixpunktiteration, d. h. in diesen Fällen muss man Newton- oder Newton-ähnliche Verfahren einsetzen, um die Konvergenz zu erzwingen. Da bei der hier betrachteten Problemstellung die Fréchet-Ableitung  $g'(s)$  nicht explizit verfügbar ist, ist man auf deren Approximation angewiesen. Dabei verwendet man eine als Steigung oder dividierte Differenz bezeichnete Approximation  $\Delta g : \mathcal{U}(s^*) \times \mathcal{U}(s^*) \subseteq \mathcal{B}_r \times \mathcal{B}_r \rightarrow L(\mathcal{B}_r)$  von  $g'$ , wobei  $L(\mathcal{B}_r)$  den Raum der linearen Abbildungen von  $\mathcal{B}_r$  in  $\mathcal{B}_r$  bezeichnet und  $\mathcal{U}(s^*)$  eine offene Umgebung von  $s^*$  in  $\mathcal{B}_r$  ist. Details findet man u. a. bei Bernet (1995). Das *einfache Schießverfahren* im Banach-Raum  $\mathcal{B}_r$  erhält damit die abstrakte algorithmische Form 23. Dieser Algorithmus bedarf allerdings noch einer Diskretisierung, wofür Finite-Differenzen-Methoden (FDM) und Finite-Elemente-Methoden (FEM) geeignet sind. Wir werden uns nachfolgend auf FDM beschränken; zu FEM verweisen wir auf Hoffmann et al. (2006).

**ALGORITHMUS 23 (Schießverfahren für Tori)**

Function  $[s^*] = \text{shooting\_tori}(\mathcal{F}, T, \text{tol}, kmax)$

1. Wähle  $s^{(0)} \in \mathcal{U}(s^*) \subset \mathcal{B}_r$ .
2. Für  $k = 0, 1, \dots, kmax$  iteriere:
  - 2.1. Löse AWP (52) mit  $v(0) = s^{(k)}$  und bestimme  $v(t; s^{(k)})$  auf  $[0, T]$ .
  - 2.2. Definiere  $g(s^{(k)}) := v(T; s^{(k)}) - s^{(k)}$  in  $\mathcal{B}_r$ .
  - 2.3. Bestimme eine Approximation  $A^{(k)} := \Delta g(s^{(k)}, \triangle^{(k)} s)$  der Fréchet-Ableitung  $g'(s^{(k)})$ .
  - 2.4. Löse in  $\mathcal{B}_r$  das lineare Gleichungssystem  $A^{(k)} d^{(k)} = -g(s^{(k)})$  und berechne  $s^{(k+1)} := s^{(k)} + d^{(k)}$ .
  - 2.5. Ist  $\|d^{(k)}\|_r < \text{tol}$ , so setze  $s^* := s^{(k+1)}$  und gehe zu Schritt 3.
3. Return  $s^*$

**Basisdiskretisierungen 1. Ordnung**

In der nachfolgenden Darstellung beschränken wir uns auf den praxisrelevanten Fall von 2-Tori mit der Variablenbezeichnung  $(\theta, t) \in \mathbb{T}^2$ . System (40) erhält dann die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Omega(\theta, t, u) \frac{\partial u}{\partial \theta} = R(\theta, t, u), \quad (\theta, t) \in \mathbb{T}^2 \quad (56)$$

mit  $\Omega : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  und den Torusbedingungen

$$u(\theta, t) = u(\theta + 2\pi, t), \quad u(\theta, t) = u(\theta, t + 2\pi).$$

Das zu lösende zugehörige AWP (52) lautet entsprechend

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Omega(\theta, t, u) \frac{\partial u}{\partial \theta} + R(\theta, t, u), \quad u(\theta, 0) = s(\theta) \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^1). \quad (57)$$

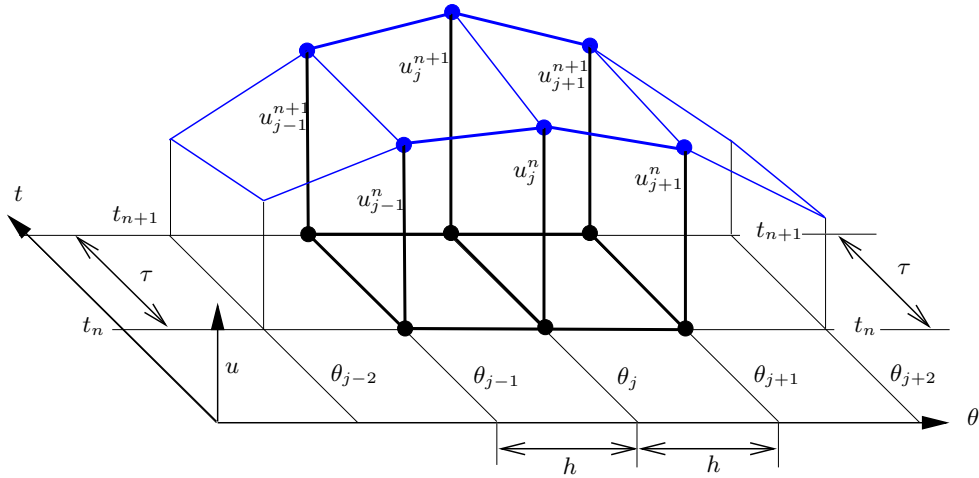
Wir diskretisieren nun den Standardtorus  $\mathbb{T}^2$  mit  $\theta$ -Schrittweite (der „Ortsschrittweite“)  $h > 0$  und  $t$ -Schrittweite (der „Zeitschrittweite“)  $\tau > 0$ , wobei wir  $\tau/h = \text{const}$  voraussetzen und deshalb  $h$  als Diskretisierungsparameter betrachten können. Der diskrete 2-Torus ist die Menge

$$\mathbb{T}_h^2 = \{(\theta_j, t_n) \mid \theta_j = jh, t_n = n\tau, j = 0(1)J - 1, n = 0(1)N - 1\}. \quad (58)$$

Ein Einschrittverfahren bezüglich der Zeitvariablen  $t$  berechnet Näherungswerte auf der  $(n+1)$ -ten Zeitschicht  $t_{n+1}$  aus den Lösungsnäherungen der  $n$ -ten Schicht  $t_n$ . Auf den Gitterpunkten  $(\theta_j, t_n)$  lassen sich zahlreiche explizite und linear implizite FDM 1. Ordnung zum AWP (52) in der allgemeinen Darstellung

$$\frac{1}{\tau} \left[ \sum_{\mu=-1}^1 S_\mu^*(\theta_j, t_n, u_j^n) u_{j+\mu}^{n+1} - \sum_{\mu=-1}^1 S_\mu(\theta_j, t_n, u_j^n) u_{j+\mu}^n \right] - R(\theta_j, t_n, u_j^n) = 0 \quad (59)$$

mit den Gitterfunktionen  $u_j^n \sim u(\theta_j, t_n)$  angeben. Offenbar stellt dieses Verfahren ein *6-Punkt-Differenzenschema* dar, bei dem die drei Lösungswerte  $u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}$  auf der  $(n+1)$ -ten Zeitschicht  $t_{n+1}$  aus den drei Werten  $u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n$  der  $n$ -ten Schicht ermittelt werden (vgl. Abb.8).  $S_\mu^* \in \mathbb{R}^{q \times q}$  und  $S_\mu \in \mathbb{R}^{q \times q}$  mit  $\mu = -1, 0, 1$  sind sechs



**Abb. 8** 6-Punkt-Differenzenschema: Lösungswerte auf den Zeitschichten  $t_n$  und  $t_{n+1}$

Diagonalmatrizen mit Argumenten auf der Zeitschicht  $t_n$ . Eine wesentliche Eigenschaft derartiger Verfahren wird durch folgende Definition beschrieben:

**Definition 24 (FDM von positivem Typ)**

Ein durch (59) gegebenes Finite-Differenzen-Verfahren (FDM) heißt *von positivem Typ*, wenn die drei Matrizen  $S_\mu(\theta, t, u)$ ,  $\mu = -1, 0, 1$ , für alle  $(\theta, t, u) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^q$  mit  $\|u\| \leq M$  und konstantem  $M > 0$  ausschließlich nichtnegative Elemente besitzen.

Ein allgemeiner Konsistenz- und Konvergenzsatz sowohl für explizite als auch linear implizite Verfahren 1. Ordnung der Form (59) wurde von Bernet (1995) bewiesen. Mit allen Voraussetzungen lautet er:

**Satz 25 (Konsistenz und Konvergenz)**

Ein Finite-Differenzen-Verfahren (59) zum AWP (57) genüge folgenden Voraussetzungen:

- i.  $\lambda := \tau/h = \text{const}$
- ii.  $\Omega(\theta, t, u) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^q, \mathbb{R})$ ,  $R(\theta, t, u) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$
- iii. (57) besitzt eine lokal eindeutige Lösung  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^q)$
- iv.  $\sum_{\mu=-1}^1 S_\mu(\theta, t, u) \equiv I$ ,  $\sum_{\mu=-1}^1 S_\mu^*(\theta, t, u) \equiv I$  mit Einheitsmatrix  $I$ ,

$$\text{v.} \quad \sum_{\mu=-1}^1 \mu (S_{\mu}^*(\theta, t, u) - S_{\mu}(\theta, t, u)) \equiv \lambda C \quad \text{mit} \quad C = \text{diag}(c_i) \\ \text{und} \quad c_i = \Omega(\theta, t, u), \quad i = 1(1)q.$$

Dann ist das Verfahren *konsistent* in  $h$  und  $\tau$  mit der Ordnung 1. Gilt weiterhin:

- vi. (59) ist von positivem Typ, die Diagonalmatrizen  $S_{\mu}^*$ ,  $\mu = -1, 0, 1$ , sind Lipschitz-stetig in  $u$  mit der zusätzlichen Bedingung, dass zwei der drei Matrizen  $S_{\mu}^*$  nur Diagonalelemente  $(s_{\mu}^*)_k \leq 0$ ,  $k = 1(1)q$ , besitzen und
- vii. bezüglich der Anfangswerte sei  $\|u_j^0 - s(\theta_j)\|_{\infty} \leq K_0 h$  für alle  $j \geq 0$ ,  $h \leq h_0$ ,  $K_0 > 0$  erfüllt,

so *konvergiert* (59) auf  $\mathbb{T}_h^2$  mit der Ordnung 1, d. h.

$$\|e_j^n\|_{\infty} = \|z_j^n - z(t_n; \theta_j)\|_{\infty} \leq Kh, \quad K > 0 \quad \text{für alle} \quad j, n.$$

In dieser allgemeinen Verfahrensdarstellung (59) sind alle nachfolgend behandelten expliziten und linear-impliziten 6-Punkt-Schemata enthalten.

### Explizite Verfahren vom Upwind-Typ

Bei diesen Verfahren wird die Matrix  $C(\theta_j, t_n, u_j^n)$  in die Summe einer Matrix  $C^+(\theta_j, t_n, u_j^n)$  mit nur positiven Elementen und einer Matrix  $C^-(\theta_j, t_n, u_j^n)$  mit nur negativen Elementen zerlegt:

$$C(\theta_j, t_n, u_j^n) = C^+(\theta_j, t_n, u_j^n) + C^-(\theta_j, t_n, u_j^n). \quad (60)$$

(a) Das *explizite Courant-Isaacson-Rees Verfahren* (CIR-Verfahren) ergibt sich mit

$$C^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{2}(c_i + |c_i|) \right) \geq 0, \quad C^- = \text{diag} \left( \frac{1}{2}(c_i - |c_i|) \right) \leq 0. \quad (61)$$

(b) Das *explizite glatte Upwind-Verfahren* entspricht der allgemeinen Darstellung

$$C^+ = \text{diag} \left( \frac{1}{2}(c_i + \Phi(c_i)) \right) \geq 0, \quad C^- = \text{diag} \left( \frac{1}{2}(c_i - \Phi(c_i)) \right) \leq 0, \quad (62)$$

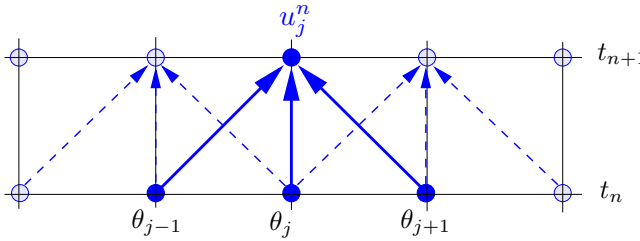
mit der Funktion  $\Phi(d) := \sqrt{\delta^2 + d^2}$  und konstantem  $\delta \neq 0$ . Offenbar stellt das CIR-Verfahren den Grenzfall für  $\delta \rightarrow 0$  mit  $\Phi(d) = |d|$  dar. Die Diagonalmatrizen  $S_{\mu}$  und  $S_{\mu}^*$ ,  $\mu = -1, 0, 1$ , besitzen für alle expliziten Verfahren vom Upwind-Typ die Form

$$\begin{aligned} S_{-1} &= \lambda C^+, & S_{-1}^* &= 0 \\ S_0 &= I - \lambda C^+ + \lambda C^-, & S_0^* &= I \\ S_1 &= -\lambda C^-, & S_1^* &= 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Nach Einsetzen dieser Matrizen in (59) lässt sich das explizite Upwind-Verfahren in der klassischen FDM-Notation mit  $\Phi(d) = \sqrt{\delta^2 + d^2}$ ,  $\delta \neq 0$ , angeben:

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} = u_j^n &+ \frac{\lambda}{2} \Omega(\theta_j, t_n, u_j^n) (u_{j-1}^n - u_{j+1}^n) + \\
&+ \frac{\lambda}{2} \Phi(\Omega(\theta_j, t_n, u_j^n)) (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + \\
&+ \tau R(\theta_j, t_n, u_j^n), \quad j = 0(1)J-1.
\end{aligned} \tag{64}$$

Wie man leicht erkennt, wird neben den Differenzenapproximationen der 1. Ableitungen nach  $t$  und  $\theta$  ein künstlicher Diffusionsterm 2. Ordnung eingeführt und durch einen zentralen Differenzenquotienten approximiert. Das Differenzenschema zur Berechnung von  $u_j^{n+1}$  ist in Abbildung 9 dargestellt.



**Abb. 9** Differenzenschema des expliziten Upwind- und Friedrichs-Verfahrens

(c) Beim *expliziten Friedrichs-Verfahren* wird die Matrix  $C(\theta_j, t_n, u_j^n)$  nicht zerlegt, und die Diagonalmatrizen  $S_\mu$  und  $S_\mu^*$ ,  $\mu = -1, 0, 1$ , besitzen nun die Form

$$\begin{aligned}
S_{-1} &= \frac{1}{2}(I + \lambda C), & S_{-1}^* &= 0 \\
S_0 &= 0, & S_0^* &= I \\
S_1 &= \frac{1}{2}(I - \lambda C), & S_1^* &= 0.
\end{aligned} \tag{65}$$

In der üblichen Notation für FDM erkennt man, dass bei diesem Verfahren an Stelle des Funktionswertes  $u_j^n$  der gemittelte Wert  $\frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$  benutzt wird:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} \Omega(\theta_j, t_n, u_j^n) (u_{j-1}^n - u_{j+1}^n) + \tau R(\theta_j, t_n, u_j^n). \tag{66}$$

Wenn die Lösungswerte  $u_j^n$  auf der  $n$ -ten Zeitschicht vorliegen, können mit beiden Verfahren die neuen Werte für  $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$  leicht bestimmt werden. Eine spezielle Randapproximation in der Umgebung von  $\theta_0 = 0$  und  $\theta_{J-1} = 2\pi - h$  ist nicht erforderlich, wenn alle Rechnungen bezüglich des Index  $j$  modulo  $J$  ausgeführt werden.

Für die beiden Verfahren (64) und (66) sind gemäß ihrer Konstruktion die Voraussetzungen (iv) und (v) des Konvergenzsatzes 25 erfüllt, womit ihre Konsistenz gesichert ist. Um auch die Voraussetzung (vi) zu garantieren, bedarf es einer *CFL-Bedingung*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Die CFL-Bedingung ist nach den Mathematikern R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy benannt, die sie 1928 einführten.

**Satz 26**

Auf der Menge  $G = \{ (\theta, t, u) \mid (\theta, t) \in \mathbb{T}^2, \|u\| \leq M, M \in \mathbb{R}, \text{const} \}$  sei die Schrittweitenbedingung (*Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl, CFL-Bedingung*)

$$\lambda \leq \frac{1}{D} \quad \text{mit} \quad D := \max_G \max_{i=1(1)q} |c_i(\theta, t, u)| \quad (67)$$

erfüllt. Dann sind das explizite CIR-Verfahren und das explizite Friedrichs-Verfahren von positivem Typ. Ist jedoch die schärfere CFL-Bedingung

$$\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + D^2}}, \quad \delta \neq 0, \quad (68)$$

erfüllt, so ist auch das explizite glatte Upwind-Verfahren von positivem Typ.

**Beweis:** (a) CIR-Verfahren: Auf Grund von (61) und (63) gilt sofort  $S_{-1} \geq 0$  und  $S_1 \geq 0$ . Die Diagonalelemente  $s_0^i$ ,  $i = 1(1)q$  von  $S_0$  lassen sich in der Form

$$s_0^i = 1 - \frac{\lambda}{2}(c_i + |c_i|) + \frac{\lambda}{2}(c_i - |c_i|) = 1 - \lambda |c_i| \geq 1 - \lambda D$$

abschätzen. Daraus folgt wegen  $\lambda \leq 1/D$  unmittelbar  $S_0 \geq 0$ .

(b) Explizites Friedrichs-Verfahren: In diesem Fall gilt  $S_0 = 0$ . Für die Diagonalelemente  $s_1^i$ ,  $i = 1(1)q$ , von  $S_1$  erhalten wir die Abschätzung

$$s_1^i = \frac{1}{2}(1 - \lambda c_i) \geq \frac{1}{2}(1 - \lambda |c_i|) \geq \frac{1}{2}(1 - \lambda D),$$

woraus wegen  $\lambda \leq 1/D$  sofort  $S_1 \geq 0$  folgt. Für die Diagonalelemente  $s_{-1}^i$ ,  $i = 1(1)q$ , von  $S_{-1}$  gilt

$$s_{-1}^i = \frac{1}{2}(1 + \lambda c_i) \geq \frac{1}{2}(1 - \lambda |c_i|),$$

womit analog zu  $S_1$  folgt, dass auch  $S_{-1} \geq 0$  erfüllt ist.

(c) Explizites glattes Upwind-Verfahren: Aus  $\Phi(d) \geq |d|$  folgt sofort  $S_{-1} \geq 0$  und  $S_1 \geq 0$ . Analog zu (a) zeigen wir für die Diagonalelemente  $s_0^i$ ,  $i = 1(1)q$ , von  $S_0$

$$s_0^i = 1 - \lambda \Phi(c_i) = 1 - \lambda \sqrt{\delta^2 + c_i^2} \geq 1 - \lambda \sqrt{\delta^2 + D^2},$$

woraus wegen  $\lambda \leq 1/\sqrt{\delta^2 + D^2}$  unmittelbar  $S_0 \geq 0$  folgt. □

Bei allen drei expliziten Verfahren sind die Diagonalmatrizen  $S_\mu^*$ ,  $\mu = -1, 0, 1$ , unabhängig von  $u$  und damit stets Lipschitz-stetig bezüglich  $u$ . Ist also zusätzlich die CFL-Bedingung (67) bzw. (68) erfüllt, so sind die Verfahren für geeignete Startwerte gemäß Voraussetzung (vii) des Satzes 25 konvergent.



### Linear implizite Verfahren vom Upwind-Typ

Wenn die Funktion  $\Omega(\theta, t, u)$  betragsgroß wird, so reduziert die CFL-Bedingung des Satzes 26 die  $t$ -Schrittweite  $\tau$  gegenüber der  $\theta$ -Schrittweite  $h$  mitunter um Größenordnungen. Dann empfehlen sich implizite Verfahren, die ohne diese einschränkende Bedingung auskommen. Allerdings entsteht nun auf jeder Zeitschicht ein nichtlineares Gleichungssystem, dessen Lösung mit wachsender Dimension sehr aufwändig wird. Um dies zu vermeiden, wenden wir das *Prinzip der eingefrorenen Koeffizienten* an, indem die Werte aller Koeffizientenfunktionen und rechten Seiten auf der zuletzt berechneten Zeitschicht  $t_n$  ermittelt und dort „eingefroren“ werden. Dadurch entstehen linear implizite Verfahren, bei denen pro Zeitschicht lediglich ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist.

Wie bei den expliziten Verfahren vom Upwind-Typ zerlegen wir dazu die Matrix

$$C(\theta_j, t_n, u_j^n) = C^+(\theta_j, t_n, u_j^n) + C^-(\theta_j, t_n, u_j^n)$$

mit den beiden Matrizen  $C^+(\theta_j, t_n, u_j^n)$  und  $C^-(\theta_j, t_n, u_j^n)$ . Diese genügen den Beziehungen (61) für das CIR-Verfahren bzw. (62) für das glatte Upwind-Verfahren mit der Funktion  $\Phi(d) := \sqrt{\delta^2 + d^2}$ ,  $\delta \neq 0$ , const.

Die Diagonalmatrizen  $S_\mu$  und  $S_\mu^*$ ,  $\mu = -1, 0, 1$ , erhalten dann für alle linear impliziten Verfahren vom Upwind-Typ die Form

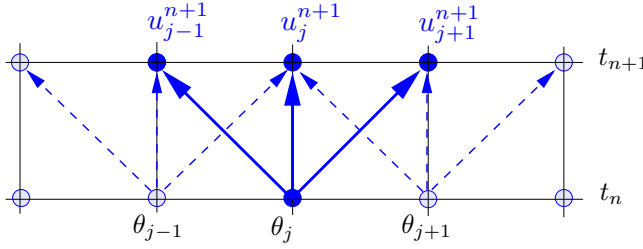
$$\begin{aligned} S_{-1} &= 0, & S_{-1}^* &= -\lambda C^+ \\ S_0 &= I, & S_0^* &= I - \lambda C^- + \lambda C^+ \\ S_1 &= 0, & S_1^* &= \lambda C^-. \end{aligned} \tag{69}$$

Setzen wir diese Matrizen in die allgemeine Darstellung (59) ein, so gewinnen wir die übliche FDM-Notation für das *linear implizite Verfahren vom Upwind-Typ*:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\lambda}{2} \Omega(\theta_j, t_n, u_j^n) (u_{j-1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}) + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \Phi(\Omega(\theta_j, t_n, u_j^n)) (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + \\ &+ \tau R(\theta_j, t_n, u_j^n), \quad j = 0(1)J - 1. \end{aligned} \tag{70}$$

Mit  $\Phi(d) = |d|$  ergibt sich auch hier das *linear implizite CIR-Verfahren* als Grenzfall. Wie man aus (70) und dem Differenzenschema zur Berechnung der Werte  $u_{j-1}^{n+1}$ ,  $u_j^{n+1}$  und  $u_{j+1}^{n+1}$  auf der  $(n+1)$ -ten Zeitschicht in Abbildung 10 erkennt, ist nun ein lineares Gleichungssystem mit Block-tridiagonaler Koeffizientenmatrix zu lösen. Mit je einer Vorwärts- und einer Rückwärtselimination pro  $t$ -Schritt verdoppelt sich lediglich der numerische Aufwand gegenüber den expliziten Verfahren.

An den drei Matrizen  $S_\mu$ ,  $\mu = -1, 0, 1$ , in (69) ist sofort erkennbar, dass das Verfahren für alle  $\lambda > 0$  von positivem Typ ist. Zudem sind die Diagonalmatrizen  $S_\mu^*$ ,  $\mu = -1, 0, 1$ ,

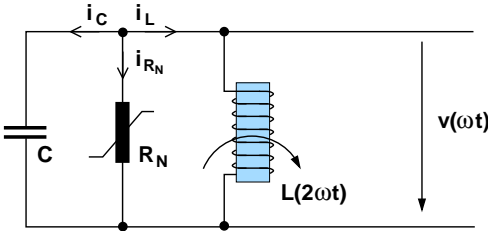


**Abb. 10** Differenzenschema des impliziten Upwind- und CIR-Verfahrens

Lipschitz-stetig bezüglich  $u$ , und wegen der Darstellung (62) von  $C^+$  und  $C^-$  gilt weiterhin  $S_{-1}^* \leq 0$  und  $S_1^* \leq 0$ . Somit ist das linear implizite Verfahren vom Upwind-Typ unter den Voraussetzungen (i)–(iii) des Satzes 25 konsistent und mit geeigneten Startwerten gemäß Voraussetzung (vii) auch konvergent.

### 3.3 Ein parametrisch erregtes elektrisches Netzwerk

Als Anwendungsbeispiel wollen wir das in Abbildung 11 dargestellte parametrisch erregte Netzwerk analysieren, das von Philippow und Büntig (1992) entwickelt wurde. Dieser Schwingkreis beinhaltet eine Kapazität  $C$ , einen nichtlinearen Widerstand  $R$  und eine lineare zeitveränderliche Induktivität  $L$  und wird auch als 2:1-Frequenzteiler genutzt.



**Abb. 11** Ein parametrisch erregtes Netzwerk von E. Philippow mit nichtlinearem Widerstand und zeitveränderlicher Induktivität. Die Kennlinie des Widerstandes ist annähernd kubisch und besitzt Bereiche mit negativem Anstieg

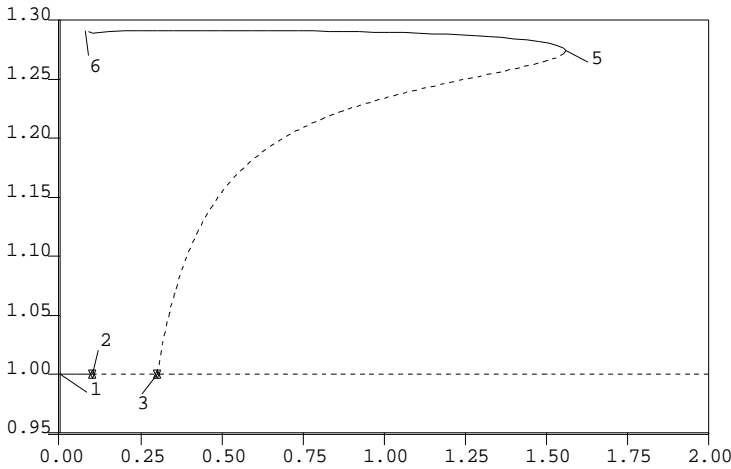
Das Modell kann mittels der Knotengleichung  $i_C + i_{R_N} + i_L = 0$  hergeleitet werden, worin die drei Ströme durch die Ausdrücke

$$i_C = C \frac{dv}{dt}, \quad i_{R_N} = b_1 v^3 - b_2 v, \quad i_L = \frac{\psi}{L_0(1 + \frac{b}{2} \sin 2\omega t)} \approx \frac{\psi}{L_0} \left(1 - \frac{b}{2} \sin 2\omega t\right)$$

gegeben sind.  $v$  bezeichnet den Spannungsabfall über den Komponenten. Mit der Beziehung  $\frac{d\psi}{dt} = v$  erhalten wir eine DGL 2. Ordnung für  $\psi(t)$ , die nach einer Normierung mittels  $x := \psi/\psi_0$  und  $t := \omega t$  in die Form

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x}^3 - \beta \dot{x} + (1 + B \sin 2t)x = 0 \quad (71)$$

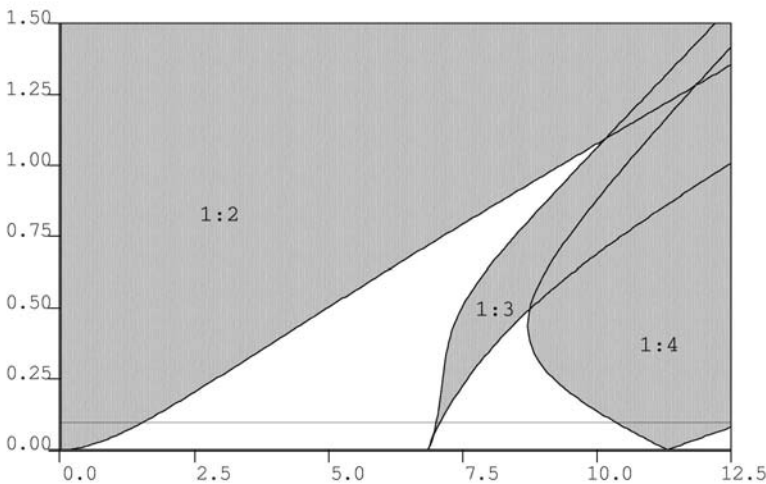
übergeht. Die Parameter dieser DGL vom Mathieuschen Typ  $\alpha = \varepsilon - B$  und  $\beta = \frac{\varepsilon}{2} - B$  mit  $B, \varepsilon \in \mathbb{R}$  werden so gewählt, dass die Systemantwort  $x(t)$  ein  $2\pi$ -periodisches Signal darstellt, d. h. die Frequenz des Eingangssignals  $B \sin 2t$  wird halbiert. Die *periodischen Lösungen* dieses Systems wurden von Hoffmann (1989) und Vogt et al. (2005) für Parameterwerte  $B = 0.1$  und  $\varepsilon \in [0, 12]$  einer Bifurkationsanalyse unterzogen.



**Abb. 12** Lösungsdiagramm der periodischen Lösung von DGL (71): Für  $\varepsilon \approx 0.1$  (Label 2) und  $\varepsilon \approx 0.3$  (Label 3) treten Periodenverdopplungen auf und es zweigt jeweils eine  $2\pi$ -periodische Lösung von der trivialen Gleichgewichtslösung ab. Diese Lösungen verschmelzen bei  $\varepsilon \approx 1.56081$  (Label 5)

Für  $0.3 < \varepsilon < 1.56081$  besitzt System (71) vier periodische Lösungen, zwei stabile und zwei vom Satteltyp, die auf einem 1:2-resonanten invarianten Torus liegen. Für  $\varepsilon > 1.56081$  existieren quasi-periodische bzw. resonante Tori, abhängig vom Verhältnis der Basisfrequenzen an  $\varepsilon$ . Sind die Basisfrequenzen rational abhängig, so sind in diesen Gebieten alle Verfahren, die Quasi-Periodizität voraussetzen, nicht anwendbar.

Das Bifurkationsdiagramm in der  $\varepsilon - B$ -Ebene wird in Abbildung 13 dargestellt. Die grauen Bereiche heißen *Arnold-Zungen*. Für Parameterwerte innerhalb solcher Arnold-Zungen tritt ein sogenanntes *phase-locking* auf, d. h. auf dem Torus liegt ein stabiler und ein instabiler periodischer Orbit. Die Diagramme in Abbildung 12 und 13 wurden mit dem Programm AUTO2000 von Doedel et al. (2002) erzeugt.



**Abb. 13** Das Bifurkationsdiagramm in der  $\varepsilon - B$ -Ebene. Die grauen Bereiche zeigen die Arnold-Zungen der 1:2-, 1:3- und 1:4-Resonanzen

Um die DGL in die Form des Modellproblems (56) zu bringen, transformieren wir sie in das System erster Ordnung

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \beta x_2 - \alpha x_2^3 - B \sin 2t \cdot x_1. \quad (72)$$

Analog zu Beispiel 21 führen wir Polarkoordinaten  $(\theta_1, u)$  mit

$$x_1 = u \cos \theta_1, \quad x_2 = u \sin \theta_1$$

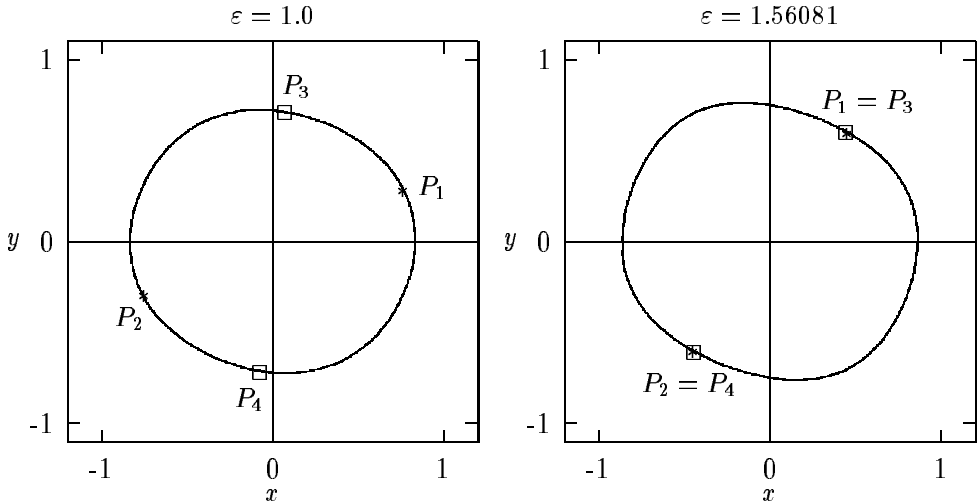
ein und setzen  $t \equiv \theta_2$ . Mit der Abkürzung  $cs = \cos \theta_1 \sin \theta_1$  entsteht das partitionierte System

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \beta cs - \sin^2 \theta_1 - \alpha u^2 \sin^3 \theta_1 \cos \theta_1 - (1 + B \sin 2\theta_2) \cos^2 \theta_1 = \Omega(\theta_1, \theta_2, u) \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= 1 \\ \frac{du}{dt} &= u(cs + \beta \sin^2 \theta_1) - \alpha u^3 \sin^4 \theta_1 - u(1 + B \sin 2\theta_2)cs = R(\theta_1, \theta_2, u). \end{aligned} \quad (73)$$

Der gesuchte invariante Torus  $\mathcal{M}$  wird dann durch die partielle DGL

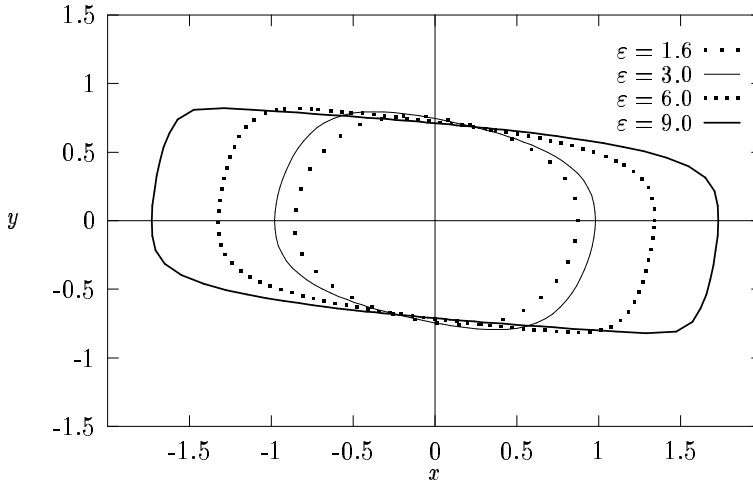
$$\frac{\partial u}{\partial \theta_2} + \Omega(\theta_1, \theta_2, u) \frac{\partial u}{\partial \theta_1} = R(\theta_1, \theta_2, u), \quad (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2 \quad (74)$$

mit den in (73) definierten Funktionen  $\Omega, R$  beschrieben. Wir diskretisieren diese PDGL mit dem linear impliziten Verfahren vom Upwind-Typ (70) auf einem  $(\theta, t)$ -Gitter der Dimension  $40 \times 80$  und wenden das Schießverfahren für Tori (vgl. Algorithmus 23) an. In Abbildung 14 werden die Torusquerschnitte, zurücktransformiert in kartesische  $(x_1, x_2)$ -Koordinaten, für den Parameterwert  $\varepsilon = 1.0$  (links) und den kritischen Wert  $\varepsilon = 1.56081$



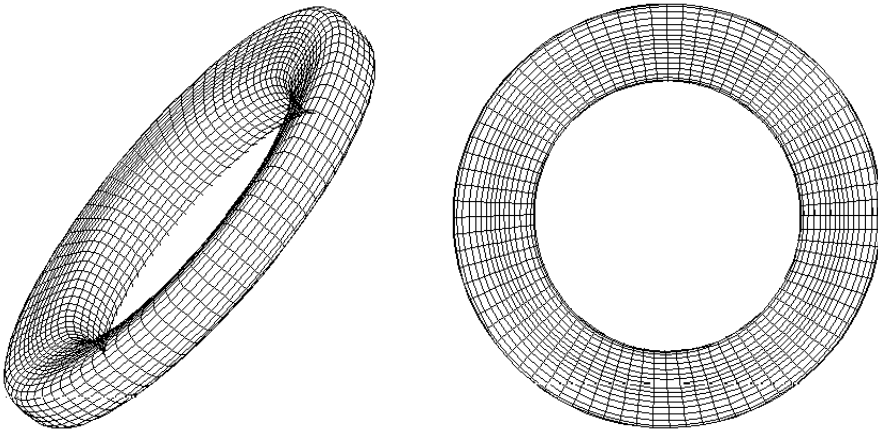
**Abb. 14** Torusquerschnitte von System (74) mit (\*) stabilen periodischen Lösungen sowie (□) instabilen periodischen Lösungen

(rechts) dargestellt. Die zuvor berechneten Stroboskop-Abbildungen  $P_1, P_2$  der periodischen Lösungen vom Satteltyp und der stabilen periodischen Lösungen  $P_3, P_4$  wurden ebenfalls eingezeichnet. Am kritischen Parameterwert  $\varepsilon \approx 1.56081$  verschmelzen je eine



**Abb. 15** Torusquerschnitte für Parameterwerte  $\varepsilon > 1.56081$

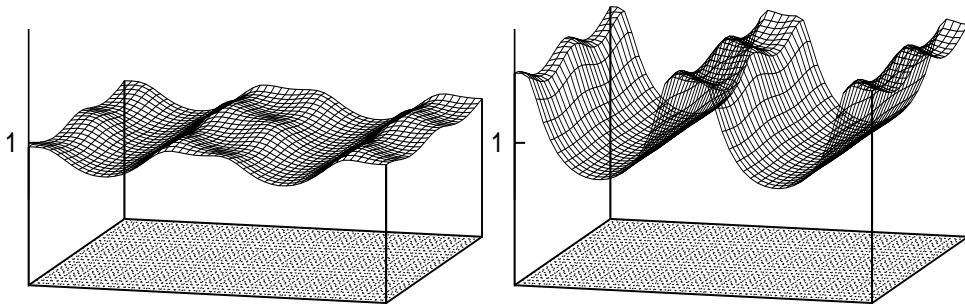
stabile und eine Lösung vom Satteltyp durch eine Sattel-Knoten-Bifurkation auf dem Torus. Für  $\varepsilon > 1.56081$  existieren dann die in Abbildung 15 dargestellten invarianten Tori, deren Attraktivität mit wachsendem  $\varepsilon$  zunimmt. In Abbildung 16 wird das Git-



**Abb. 16** Gittermodell des Torus für  $\varepsilon = 5.0$ , berechnet mit dem Programm TORUS von Bernet (1995)

termodell des invarianten Torus mit  $\varepsilon = 5.0$  in zwei Ansichten dargestellt. Informativer ist allerdings die ermittelte Torusfunktion  $u(\theta, t)$  über dem  $(\theta, t)$ -Gitter in Abbildung 17, an der wir die erhebliche Abweichung von  $\mathcal{M}$  gegenüber dem Standardtorus  $\mathbb{T}^2$  für

den Parameter  $\varepsilon = 9.0$  deutlich erkennen können. Aus den Abbildungen wird zugleich ersichtlich, dass sowohl die 1:2-resonanten invarianten Tori für  $\varepsilon \leq 1.56081$ , als auch sämtliche für  $\varepsilon > 1.56081$  entstehenden quasi-periodischen und resonanten Tori mit dem vorgestellten Verfahren zuverlässig bestimmbar sind.



**Abb. 17** Torusfunktion  $u(\theta, t)$  auf dem  $(\theta, t)$ -Gitter für System (74). Links:  $B = 0.1$ ,  $\varepsilon = 3$ , rechts:  $B = 0.1$ ,  $\varepsilon = 9.0$

Fassen wir abschließend die Vorteile dieser Methode zur numerischen Approximation invarianter  $p$ -Tori zusammen:

- Während die in den 1980er Jahren von Kaas-Petersen (1985) und Van Veldhuizen (1987) entwickelten ersten Verfahren stark vom Verlauf der Orbits auf dem Torus abhängig waren, besitzt der vorgestellte Zugang über die Lösung des partiellen DGL-Systems (40) den Vorteil einer weitgehenden *Unabhängigkeit von den Orbits*. Wie am vorgestellten System (71) verdeutlicht, unterscheidet er nicht zwischen quasi-periodischen und resonanten  $p$ -Tori und ist damit universell einsetzbar.
- Die partielle DGL (40) kann numerisch als quasilineares hyperbolisches System zuverlässig mit FDM vom Upwind-Typ gelöst werden – allerdings nur mit Konvergenzordnung 1. Mittels Extrapolation ist eine höhere Konvergenzordnung erreichbar, falls die gegebenen Funktionen hinreichend glatt sind. Dabei lassen *linear implizite Verfahren* (70) große  $t$ -Schrittweiten zu, womit wegen der  $\theta$ -Dimension  $p - 1$  des entstehenden diskreten Problems der Rechen- und Speicheraufwand erheblich reduziert wird.
- Mit dem *Schießverfahren* 23 lassen sich nicht nur asymptotisch stabile  $p$ -Tori gemäß Definition 16, sondern auch instabile Tori approximieren. Allerdings sollte bei „starker“ Instabilität das Mehrfach-Schießverfahren aus Vogt (2010b) eingesetzt werden. Den Schwachpunkt des Verfahrens stellt gewiss die erforderliche Ausgangsform (21) der DGL in *Toruskoordinaten*  $(\theta, u) \in \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q$  dar. Der Übergang von kartesischen Koordinaten mittels einer Transformation (19) gelingt numerisch oft nur bei zuvor bekanntem Lösungsverhalten.

## 4 Quasi-periodische invariante Tori

In diesem Abschnitt wollen wir jede *a-priori*-Transformation in globale Toruskordinaten  $(\theta, u) \in \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q$  mit  $p + q = n$  vermeiden, ebenso eine lokale Transformation in Toruskordinaten (vgl. Samoilenko (1991)), die meist nur mit großem analytischen Aufwand zu beschaffen sind. Um für das in kartesischen Koordinaten vorgegebene Vektorfeld  $f$  eine Invarianzgleichung für einen  $p$ -Torus zu gewinnen, müssen wir uns allerdings nun auf *quasi-periodische Tori* beschränken.

Aus der Theorie ist zwar bekannt (vgl. Broer et al. (1996)), dass im dynamischen System externe Parameter vorhanden sein müssen, damit quasi-periodische Tori beobachtet werden können. Aber auch dann treten quasi-periodische Tori nur für solche Mengen von Parameterwerten auf, die die Struktur einer Cantor-Menge haben. Mit anderen Worten: Es gibt eine offene, überall dichte Teilmenge von Parameterwerten, für die kein invarianter quasi-periodischer  $p$ -Torus existiert. Beliebige kleine Störungen zerstören zwar die Quasi-Periodizität, nicht aber den Torus!

Da eine numerische Unterscheidung zwischen einem quasi-periodischen und einem schwach resonanten Torus, auf dem periodische Orbits mit sehr großer Periodendauer liegen, kaum möglich ist, dürfen wir davon ausgehen, dass Verfahren für quasi-periodische Tori auch für schwach resonante Tori brauchbare Resultate liefern. Wie schon in Beispiel 4 verdeutlicht, sind die im Computer durch Gleitpunktzahlen approximierten Basisfrequenzen schließlich immer rational abhängig.

### 4.1 Eine spezielle Invarianzgleichung für $p$ -Tori

Wir gehen desweiteren von folgendem allgemeinen Modellproblem für  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, \Omega_1 t, \Omega_2 t, \dots, \Omega_m t) \quad (75)$$

mit  $m \geq 0$  vorgegebenen *Erregungsfrequenzen*  $\Omega := (\Omega_1, \dots, \Omega_m) \in \mathbb{R}^m$  aus, wobei  $f$   $2\pi$ -periodisch in den Argumenten  $2, 3, \dots$  ist. Die  $\Omega_i$  können als rational unabhängig vorausgesetzt werden; denn wären sie für  $m \geq 2$  rational abhängig, so ließe sich ihre Anzahl stets sukzessive reduzieren. Gilt etwa  $k_m \Omega_m = \sum_{i=1}^{m-1} k_i \Omega_i$ , so substituieren wir  $\Omega_i$  mittels

$$\begin{aligned} f(x, \Omega_1 t, \Omega_2 t, \dots, \Omega_m t) &= f\left(x, \Omega_1 t, \Omega_2 t, \dots, \Omega_{m-1} t, \frac{1}{k_m} \left(\sum_{i=1}^{m-1} k_i \Omega_i\right) t\right) \\ &=: f_{\text{neu}}(x, \Omega_1 t, \Omega_2 t, \dots, \Omega_{m-1} t) \end{aligned}$$

und untersuchen  $f_{\text{neu}}$  auf rationale Unabhängigkeit usw. Wie im periodischen Fall können wir System (75) in eine autonome DGL umwandeln, wenn wir es um  $m$  Toruskoordinaten  $\theta \in \mathbb{T}^m$  erweitern und das *autonome Modellproblem* erhalten:

$$\dot{x} = f(x, \theta), \quad \dot{\theta} = \Omega \quad \text{mit} \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m. \quad (76)$$

### Bemerkung 27

Durch die DGL (76) wird das  $C^r$ -Vektorfeld  $f(x, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta}$  auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$  gegeben. Unser Modellproblem besitzt einen *invarianten  $p$ -Torus  $\mathcal{M}$  mit parallelem Fluss (paralleler Dynamik)*, wenn ein Diffeomorphismus  $\mathcal{M} \mapsto \mathbb{T}^p$  existiert, der das restringierte  $C^r$ -Vektorfeld  $(f(x, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta})|_{\mathcal{M}}$  in ein konstantes Vektorfeld

$$\sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}$$

auf dem  $p$ -dimensionalen Standardtorus  $\mathbb{T}^p$  transformiert. ■

Wir wollen nun die Voraussetzungen an unsere Problemstellung formulieren:

### Voraussetzung 28

i.  $f$  ist  $2\pi$ -periodisch in allen  $\Omega_i t$ , d. h. für alle  $(x, \theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  gilt

$$f(x, \theta_1, \dots, \theta_i + 2\pi, \dots, \theta_m) = f(x, \theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_m), \quad i = 1(1)m.$$

ii. System (75) besitzt eine lokal eindeutige quasi-periodische Lösung  $x^* \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , mit  $p$  Basisfrequenzen ( $m \leq p < m + n$ ) und der Frequenzbasis

$$(\Omega, \omega) := (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m, \omega_{m+1}, \dots, \omega_p) \in \mathbb{R}^p.$$

iii.  $f \in C^{s+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m, \mathbb{R}^n)$  mit  $s \in \mathbb{N}$  und  $s > r - 1 + \frac{p}{2}$ .

Für die freien Frequenzen  $\omega \in \mathbb{R}^{p-m}$  der Frequenzbasis  $(\Omega, \omega)$  einer quasi-periodischen Funktion wird im Folgenden stets die verschobene Indizierung  $\omega = (\omega_{m+1}, \dots, \omega_p)$  verwendet. Analog zu periodischen Schwingungen lassen sich nun folgende Modellprobleme unterscheiden:

- autonomer Fall:  $p > 0, m = 0$
- periodisch erregter Fall:  $p \geq m, m = 1$
- quasi-periodisch erregter Fall:  $p \geq m, m > 1$ .

Speziell für  $p = 1, m = 0$  erhalten wir hieraus den autonomen periodischen Fall, während für  $p = m = 1$  ein periodisch erregtes System mit periodischer Systemantwort vorliegt. Zur vorausgesetzten quasi-periodischen Lösung  $x^* \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  suchen wir eine zugehörige Torusfunktion  $u^* \in C(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^n)$  und  $p - m$  Basisfrequenzen  $\omega_{m+1}, \dots, \omega_p$  mit

$$x^*(t) = u^*(\Omega t, \omega t) = u^*(\Omega_1 t, \dots, \Omega_m t, \omega_{m+1} t, \dots, \omega_p t). \quad (77)$$



Wir setzen diesen Ansatz in die DGL (75) ein und erhalten nach Differentiation

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u^*}{\partial \theta_i}(\Omega t, \omega t) + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u^*}{\partial \theta_j}(\Omega t, \omega t) = f(u^*(\Omega t, \omega t), \Omega t).$$

Definieren wir zu beliebigem  $u \in C(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^n)$  die Residuumsfunktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$g(t) := \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\Omega t, \omega t) + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\Omega t, \omega t) - f(u(\Omega t, \omega t), \Omega t), \quad (78)$$

so verschwindet  $g$  auf  $\mathbb{R}$ , wenn  $u = u^*$  gilt und damit eine Lösung gemäß (77) vorliegt. Nach Voraussetzung 28 ist  $g \in C^{r-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  und quasi-periodisch mit Basisfrequenzen  $\Omega_1, \dots, \Omega_m, \omega_{m+1}, \dots, \omega_p$ . Die zugehörige Torusfunktion  $G : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit der Darstellung

$$g(t) = G(\Omega t, \omega t) = G(\Omega_1 t, \dots, \omega_p t)$$

lautet dann

$$G(\theta) := \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) - f(u(\theta), \theta). \quad (79)$$

Gemäß Satz 5 gilt damit auch für die Funktionen  $g$  und  $G$  die Normgleichheit

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| = \max_{\theta \in \mathbb{T}^p} |G(\theta)|,$$

womit  $g(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  genau dann gilt, wenn  $G(\theta) = 0$  für alle  $\theta \in \mathbb{T}^p$  ist. Jede Lösung  $u^* \in C(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^n)$  des Torussystems

$$\sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) = f(u(\theta), \theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^p \quad (80)$$

liefert folglich eine quasi-periodische Lösung  $x^*(t) = u^*(\Omega t, \omega t)$  der Gleichung  $g(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , mit dem durch (78) definierten  $g$  und damit auch der gegebenen DGL (75).

Die Existenz einer Lösung dieser PDGL ergibt sich mit Voraussetzung 28 und Satz 5 nach Samoilenko (1991), S.83:

### Satz 29

$x \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  sei eine quasi-periodische Funktion mit Frequenzbasis  $\omega \in \mathbb{R}^p$  und dem Graphen

$$\gamma := \{(x(t), \omega t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^p \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Dann existiert eine Torusfunktion  $u \in C^r(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^n)$  mit  $x(t) = u(\omega t)$ , deren Graph

$$\mathcal{M} := \{(u(\theta), \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^p \mid \theta \in \mathbb{T}^p\} = \bar{\gamma},$$

$C^r$ -homöomorph zu  $\mathbb{T}^p$  ist.

Folgende Klassifikation dieser *Invarianzgleichung für  $p$ -Tori* erscheint nun angebracht:

1. *Response-Fall*: Bei  $p = m$  sind alle Basisfrequenzen vorgegeben, keine Phase ist frei und die zweite Summe in (80) verschwindet.  $x^* = u(\Omega t)$  ist eine „Systemantwort“ (response case).
2. *Torus mit freien Phasen*: Falls  $p > m$  ist, so ist die Lösung des Torussystems nicht eindeutig bestimmt. Denn ist  $(u(\theta), \omega)$  eine Lösung, so auch

$$(v(\theta), \omega) := (u(\theta + \beta), \omega) \quad \text{mit} \quad \beta = (0, \dots, 0, \beta_{m+1}, \dots, \beta_p)$$

für beliebiges festes  $\beta \in \mathbb{R}^p$ . Der Torus  $u(\theta)$  hat also  $(p - m)$  freie Phasen.

3. *Autonomer Fall*:  $m = 0 < p$  stellt den „autonomen Grenzfall“ dar, bei dem alle  $p$  Phasen frei und damit zu ermitteln sind. Hier verschwindet die erste Summe in (80).

Wegen der Vorgabe aller Erregungsfrequenzen  $\Omega$  bietet der Response-Fall theoretisch und praktisch die geringsten Schwierigkeiten, wogegen die beiden Fälle mit  $p > m$  zusätzliche Phasenbedingungen zur gleichzeitigen Bestimmung der unbekannten Basisfrequenzen  $\omega$  erfordern.

### Bemerkung 30

Die Invarianzgleichung (80) verallgemeinert die in Vogt (2010a) und Vogt (2010b) aufgestellten Bestimmungsgleichungen für Gleichgewichte und periodische Orbits:

- *Gleichgewichtslage (Ruhelage)*: Für  $p = 0$  ist  $m = 0$ , und (80) reduziert sich auf

$$0 = f(u), \quad u \in \mathbb{R}^n. \quad (81)$$

- *Periodischer Orbit (Grenzzyklus)*: Für  $p = 1$  und  $m = 1$  liegt der periodisch erregte Fall mit bekannter Erregungsfrequenz  $\Omega \in \mathbb{R}$  vor:

$$\Omega \frac{du}{dt} = f(u, t). \quad (82)$$

$p = 1$  und  $m = 0$  liefert den autonomen Fall mit unbekannter Frequenz  $\omega \in \mathbb{R}$ :

$$\omega \frac{du}{dt} = f(u). \quad (83)$$

- *Biperiodischer Orbit mit zwei Basisfrequenzen*:  $p = 2$  und  $m = 2$  ergibt den quasi-periodisch erregten Fall mit zwei Erregungsfrequenzen  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}$

$$\Omega_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_1} + \Omega_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} = f(u, \theta_1, \theta_2). \quad (84)$$

$p = 2$  und  $m = 1$  liefert den periodisch erregten Fall mit einer Erregungsfrequenz  $\Omega$  und einer unbekannten Basisfrequenz  $\omega \in \mathbb{R}$

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial \theta_1} + \omega \frac{\partial u}{\partial \theta_2} = f(u, \theta_1). \quad (85)$$

$p = 2, m = 0$  ist der autonome Fall mit zwei unbekannten Basisfrequenzen  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$

$$\omega_1 \frac{\partial u}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} = f(u). \quad \blacksquare \quad (86)$$

Bevor wir die numerische Lösung der PDGL (80) in Angriff nehmen, wollen wir sie als Operatorgleichung in geeigneten *Sobolew-Räumen*  $\mathcal{H}^s := [\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)]^n$  notieren.  $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)$  kann mit dem Raum der bezüglich jeder Variablen  $\theta_j$  ( $j = 1, \dots, p$ )  $2\pi$ -periodischen Funktionen identifiziert werden, die auf  $\mathbb{T}^p$  quadratisch summierbar sind und verallgemeinerte Ableitungen bezüglich  $\theta$  bis einschließlich der Ordnung  $s$  besitzen. Im Raum  $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)$  sind das Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)} := \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial^\alpha x, \partial^\alpha y \rangle_{\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)}$$

mit dem verallgemeinerten Differenzialoperator  $\partial^\alpha$  der Ordnung  $|\alpha|$  zum Multi-Index  $\alpha \in [\mathbb{Z}_{\geq 0}]^p$  und die dadurch induzierte Norm  $\|x\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)}^2 := \langle x, x \rangle_{\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)}$  definiert. Das Skalarprodukt in  $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)$  ist dabei durch

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p)} := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} x(\theta) \overline{y(\theta)} d\theta$$

gegeben, weshalb speziell  $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p) = \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^p)$  ist. Desweiteren genügen die Räume der Einbettungskette

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^p) = \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^p) \supset \mathcal{H}^1(\mathbb{T}^p) \supset \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^p) \supset \dots$$

Nach Voraussetzung 28 ist für  $s > r - 1 + \frac{p}{2}$  die Einbettung von  $\mathcal{H}^{s+1}(\mathbb{T}^p)$  in  $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^p)$  kompakt. Gemäß Samoilenko (1991) lassen sich diese Aussagen auch auf die Räume  $\mathcal{H}^s := [\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)]^n$  übertragen. Stattet man die Räume  $\mathcal{H}^s$  mit den Skalarprodukten für Räume der Form  $[X]^n$  aus, so werden sie Hilbert-Räume. In diesen Hilbert-Räumen definieren wir den verallgemeinerten Differenzialoperator  $F : \mathcal{H}^{s+1} \rightarrow \mathcal{H}^s$  mit

$$F(u) := \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i}(\theta) - f(u(\theta), \theta), \quad (87)$$

der wohldefiniert und 2-mal Fréchet-differenzierbar ist. Damit wird im *Response-Fall* mit  $p = m$  das Newton-Verfahren auf die Operatorgleichung

$$F(u) = 0, \quad u \in \mathcal{H}^{s+1} \quad (88)$$

anwendbar und in der Form

$$F'(u^{(k)}) d^{(k)} = -F(u^{(k)}), \quad u^{(k+1)} = u^{(k)} + d^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (89)$$

darstellbar. Unter geeigneten Voraussetzungen an  $F$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass die durch das Verfahren berechnete Funktionenfolge  $\{u^{(k)}\}$  für jede Startfunktion  $u^{(0)}$  mit  $\|u^{(0)} - u^*\| \leq \delta$  wohldefiniert ist und Q-quadratisch gegen die gesuchte Lösung  $u^*$  von  $F(u) = 0$  konvergiert.

Im *Fall freier Phasen* mit  $p > m$  ist die Parametrisierung von  $u$  bezüglich  $\theta_{m+1}, \dots, \theta_p$  nicht eindeutig durch die Invarianzgleichung festgelegt. Ähnlich wie im autonomen Fall periodischer Orbits können wir nun die unbekannten Basisfrequenzen  $\omega_{m+1}, \dots, \omega_p$  als künstliche Variablen wählen und die Bestimmungsgleichung um  $p - m$  „Phasenbedingungen“ erweitern. Dazu setzen wir voraus, dass während der numerischen Lösungsfortsetzung bereits eine Näherungslösung  $\tilde{u} \in \mathcal{H}^{s+1}$  ermittelt wurde. Bestimmen wir den Nullraum

$$\tilde{K} := \text{span}\{\tilde{k}_{m+1}, \dots, \tilde{k}_p\}, \quad \tilde{k}_i := \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i}, \quad i = m+1, \dots, p,$$

der Linearisierung  $L = F'(\tilde{u})$ , so können wir die Torusgleichung um  $(p - m)$  integrale Phasenbedingungen erweitern

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} &= f(u(\theta), \theta) \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i}, u \right\rangle_{\mathcal{H}^0} &:= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_i}, u \right\rangle d\theta = 0, \quad i = m+1, \dots, p. \end{aligned} \quad (90)$$

Mit dem zusammengesetzten Operator  $F : \mathcal{H}^{s+1} \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}^s \times \mathbb{R}^{p-m}$  kann dieses erweiterte System nun in der kompakten Darstellung

$$F(u, \omega) := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \Omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \sum_{i=m+1}^p \omega_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} - f(u(\theta), \theta) \\ \int_{\mathbb{T}^p} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_{m+1}}, u \right\rangle d\theta \\ \dots\dots\dots \\ \int_{\mathbb{T}^p} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_p}, u \right\rangle d\theta \end{pmatrix} = 0 \quad (91)$$

notiert werden. Mit beträchtlichem Aufwand kann auch für diesen Fall nachgewiesen werden, dass unter Zusatzvoraussetzungen an  $F$  und insbesondere an die Näherungslösung  $\tilde{u}$  das Newton-Verfahren

$$(u^{(k+1)}, \omega^{(k+1)}) = (u^{(k)}, \omega^{(k)}) - [F'(u^{(k)}, \omega^{(k)})]^{-1} F(u^{(k)}, \omega^{(k)}) \quad (92)$$

mit  $k = 0, 1, 2, \dots$  Q-quadratisch gegen die gesuchte Lösung  $(u^*, \omega^*)$  von  $F(u, \omega) = 0$  konvergiert (vgl. Schilder (2004)).

## 4.2 Semidiskretisierung von 2-Tori

Bevor wir die allgemeine Invarianzgleichung (80) bzw. die erweiterte Gleichung (90) bei Vorliegen freier Phasen weiter bearbeiten, wollen wir die in technischen Anwendungen sehr häufig auftretende periodisch erregte DGL

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (93)$$

behandeln, für die eine quasi-periodische Lösung  $x(t)$  mit zwei Basisfrequenzen gesucht ist. Typische Anwendungen stellen mechanische und elektrische Schwingkreise dar, z. B. energetische Systeme. Ohne wesentliche Änderungen ist eine Übertragung auf quasi-periodisch erregte Systeme mit zwei Basisfrequenzen möglich, wogegen die Behandlung autonomer Systeme aufwendiger wäre.

Die Voraussetzungen 28 seien mit  $p = 2$  erfüllt, wobei dann für die gegebene Erregungsfrequenz  $\Omega = 1$  angenommen werden kann. Gesucht sind damit die unbekannte Basisfrequenz  $\omega \in \mathbb{R}$  und eine Lösung der Invarianzgleichung (85). Mit den vereinfachten Bezeichnungen  $\theta_1 = t$  und  $\theta_2 = \theta$  lautet diese PDGL nun

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \omega \frac{\partial u}{\partial \theta} = f(u, t) \quad \text{für } u = u(t, \theta). \quad (94)$$

Um die *Galerkin-Methode* bezüglich der Variablen  $\theta_1 = t$  anzuwenden, wählen wir periodische Basisfunktionen  $\varphi_k : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\varphi_k(t) := e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (95)$$

Diese Funktionen bilden bekanntermaßen ein Orthonormalsystem im Hilbert-Raum  $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^1) = \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^1)$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^1)} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \overline{y(t)} dt.$$

Da wir eine Lösung  $u \in \mathcal{H}^s$  der Gleichung (94) suchen, definieren wir zu gegebenem *Diskretisierungsparameter*  $N \in \mathbb{N}$  die linearen Unterräume  $\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^2) \subset \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^2)$  mit

$$\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^2) := \text{span}\{u \cdot \varphi_k \mid u \in \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^1), k = -N(1)N\}$$

und kürzen deren  $n$ -faches Produkt analog zu  $\mathcal{H}^0$  mit  $\mathcal{H}_N^0 := [\mathcal{H}_N^0(\mathbb{T}^2)]^n$  ab. Für die Semidiskretisierung führen wir zu  $u : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{H}^0$ , den Projektionsoperator  $P_N : \mathcal{H}^0 \rightarrow \mathcal{H}_N^0$  mit

$$(P_N u)(t, \theta) := \sum_{k=-N}^N u_k(\theta) \varphi_k(t) \quad (96)$$

ein. Die vektoriellen Fourier-Koeffizienten  $u_k : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}^n$  werden dann durch

$$u_k(\theta) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, \theta) \overline{\varphi_k(t)} dt.$$

definiert. Die Elemente des Unterraumes  $\mathcal{H}_N^0$  mit der Darstellung

$$u^N = u^N(t, \theta) := \sum_{k=-N}^N u_k(\theta) \varphi_k(t) \quad (97)$$

setzen wir nun in PDGL (94) ein und wenden darauf den Projektionsoperator  $P_N$  an

$$P_N \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} + \omega \frac{\partial u^N}{\partial \theta} - f(u^N, t) \right) = 0.$$

Mit der Linearität des Operators  $P_N$  und der Ableitung  $\dot{\varphi}_k(t) = ik\varphi_k(t)$  der Basisfunktionen gewinnen wir hieraus die Gleichung

$$r^N(t, \theta) := \sum_{k=-N}^N ik u_k(\theta) \varphi_k(t) + \sum_{k=-N}^N \omega u'_k(\theta) \varphi_k(t) - \sum_{k=-N}^N h(u^N) \varphi_k(t) = 0,$$

wobei der  $k$ -te Fourier-Koeffizient der rechten Gleichungsseite  $f(u^N(t, \theta), t)$

$$h_k(u^N) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u^N(t, \theta), t) \overline{\varphi_k(t)} dt \quad (98)$$

lautet und damit nicht von  $t$  abhängt. Anwendung der Galerkin-Bedingung, d. h. der Orthogonalität des Residuums  $r^N(t, \theta)$  zu allen  $2N+1$  Basisfunktionen  $\varphi_l(t)$ ,  $l = -N(1)N$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^N(t, \theta) \overline{\varphi_l(t)} dt = 0, \quad l = -N(1)N,$$

liefert schließlich das *Galerkin-System*, auch *Spektralsystem* genannt,

$$\omega u'_k(\theta) = h_k(u^N) - ik u_k(\theta), \quad k = -N(1)N \quad (99)$$

für die gesuchten komplexwertigen Fourier-Koeffizienten  $u_k(\theta)$  der Lösungsapproximation (97). Diese Gleichungen bilden ein autonomes System aus  $(2N+1)n$  gewöhnlichen Differenzialgleichungen 1. Ordnung für die periodischen Koeffizientenfunktionen  $u_k(\theta)$  unbekannter Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$ . Damit führt die Semidiskretisierung bezüglich  $t$  durch den Ansatz (97) auf ein standardmäßiges Periodizitätsproblem, wofür in Vogt (2010b) leistungsfähige Verfahren entwickelt wurden.

Bevor wir das Spektralsystem und insbesondere die Funktionen  $h_k(u^N)$  generieren, führen wir eine kompaktere Notation der  $(2N + 1)n$  DGL ein. Dazu fassen wir mit der Matrixfunktion  $U : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}^{n \times (2N+1)}$  und der Vektorfunktion  $\varphi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}^n$  gemäß

$$U(\theta) = (u_{-N}(\theta), \dots, u_0(\theta), \dots, u_N(\theta)) \quad \text{und} \quad \varphi(t) = (\varphi_{-N}(t), \dots, \varphi_0(t), \dots, \varphi_N(t))^T$$

die Funktionen zusammen und können den Ansatz (97) damit in der Form

$$u^N(t, \theta) = U(\theta)\varphi(t) \tag{100}$$

notieren. Analog fassen wir die Fourier-Koeffizienten  $h_k(u^N)$  aus (98) zur Matrix

$$H = H(U(\theta)) = (h_{-N}(u^N), \dots, h_0(u^N), \dots, h_N(u^N))$$

zusammen und definieren schließlich die  $(2N + 1) \times (2N + 1)$ -Diagonalmatrix  $\Phi := \text{diag}(-iN, -i(N - 1), \dots, -2i, -i, 0, i, 2i, \dots, i(N - 1), iN)$ . Damit lautet das Spektralsystem nun in Matrixnotation

$$\omega U'(\theta) = H(U(\theta)) - U(\theta)\Phi. \tag{101}$$

Aus der Herleitung dieses Systems gewinnen wir im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  leicht folgenden

### Satz 31

Unter den Voraussetzungen 28 gilt für  $N \rightarrow \infty$ :  $x(t) = U(\theta)\varphi(t)$  ist eine quasi-periodische Lösung des Originalsystems (93) mit zwei Basisfrequenzen  $(1, \omega)$  genau dann, wenn  $U(\theta)$  eine  $2\pi$ -periodische Lösung des (unendlich-dimensionalen) Spektralsystems (101) mit irrationaler Frequenz  $\omega$  ist.

Da in der Regel die zweite Basisfrequenz  $\omega$  unbekannt ist, kann diese formal eliminiert werden. Setzen wir  $\theta = \omega\tau$  und damit  $U(\theta) = U(\omega\tau) =: Y(\tau)$ , so lautet das transformierte Spektralsystem

$$Y'(\tau) = H(Y(\tau)) - Y(\tau)\Phi. \tag{102}$$

Gesucht sind nun periodische Lösungen  $Y(\tau)$  mit unbekannter Periodendauer  $T$ , nach deren Ermittlung sich die zweite Basisfrequenz zu  $\omega = 2\pi/T$  ergibt.

### Bemerkung 32

1. Mit der Lösungsdarstellung (97) lässt sich die Invarianzkurve  $\gamma_1$  der Stroboskop-Abbildung bezüglich  $\theta_1$  genauso leicht approximieren wie die zweite Stroboskop-Abbildung  $\gamma_2$  bezüglich  $\theta_2$ :

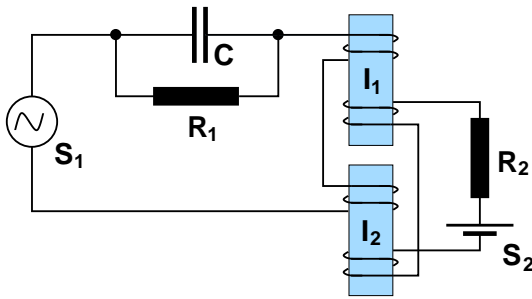
$$\gamma_1(\theta_2) := \sum_{k=-N}^N u_k(\theta_2)\varphi_k(0) \quad \text{und} \quad \gamma_2(\theta_1) := \sum_{k=-N}^N u_k(0)\varphi_k(\theta_1). \tag{103}$$

2. Mittels des Spektralsystems (102) können auch Gleichgewichtspunkte bestimmt werden. Jede Matrix  $A = (a_{kl})$ , die dem System

$$A\Phi = H(A), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times (2N+1)} \quad (104)$$

genügt, generiert eine  $2\pi$ -periodische Näherungslösung  $x(t) = A\varphi(t)$  der Original-DGL. Im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  gilt unter den Voraussetzungen 28:  $A = (a_{kl})$ ,  $k = 1(1)n$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , ist eine Lösung des Gleichungssystems (104) und damit Gleichgewichtslage des Spektralsystems, genau dann, wenn  $x(t) = A\varphi(t)$  eine  $2\pi$ -periodische Lösung des Originalsystems (93) ist. ■

Diese Aussage stellt ein klassisches Resultat dar (vgl. Hale (1963)), das durch Satz 31 auf den Fall quasi-periodischer Lösungen des Originalsystems verallgemeinert wurde. Die Voraussetzung über die Inkommensurabilität der Basisfrequenzen ist dabei unabdingbar, so dass der Fall resonanter Tori gesondert untersucht werden muss.



**Abb. 18** Elektrischer Resonanzkreis mit zwei nichtlinearen Induktivitäten  $I_1$  und  $I_2$ , deren Kennlinie als kubisch angenommen wird. Es besteht aus dem periodisch erregten System mit sinusförmiger Spannungsquelle  $S_1$  und den Sekundärwicklungen mit Gleichspannungsquelle  $S_2$  (Bild aus Vogt et al. (2005))

### Anwendung auf einen nichtlinearen elektrischen Resonanzkreis

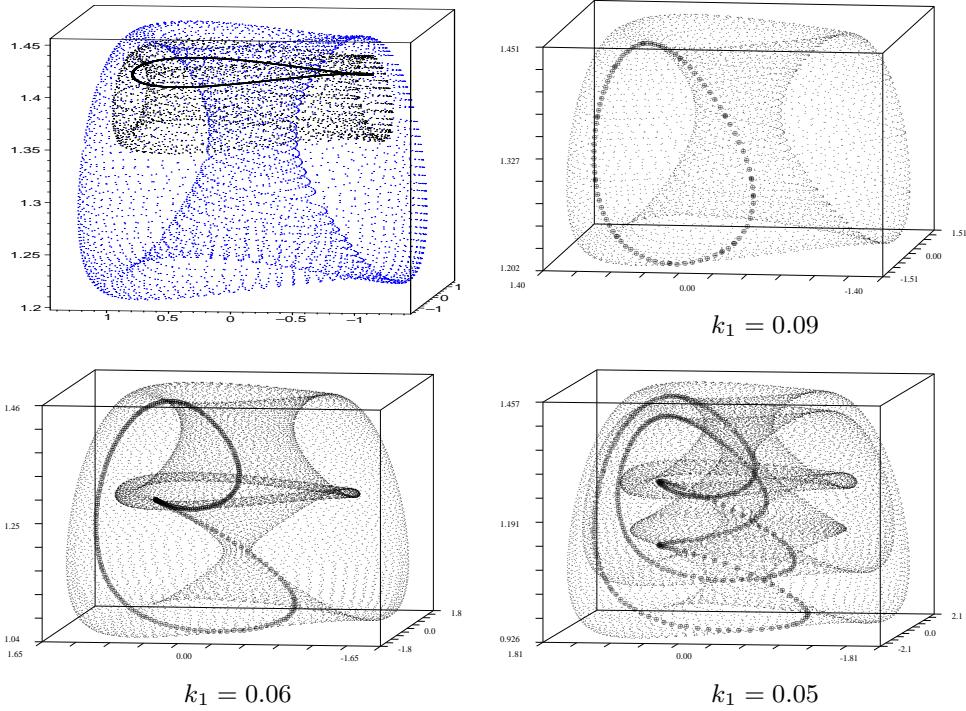
Wir betrachten ein System von Hayashi (1985)<sup>2</sup>, das den in Abbildung 18 dargestellten elektrischen Resonanzkreis mit zwei nichtlinearen Induktivitäten beschreibt. Das System vom Duffing-Typ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_2 - \frac{1}{8}(x_1^2 + 3x_3^2)x_1 + B \cos t \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{8}k_2(3x_1^2 + x_3^2)x_3 + B_0 \end{aligned} \quad (105)$$

reduziert sich für  $x_3 \equiv 0$  und  $B_0 = 0$  auf die klassische Duffing-Gleichung. Wir wollen das qualitative Verhalten der Lösungen für die Parameterwerte  $B_0 = 0.03$ ,  $B = 0.22$ ,  $k_2 = 0.05$  und den Kontrollparameter  $k_1 \in [0.043, 0.09]$  untersuchen. Mit numerischer Integration kann eine Torus-Bifurkation der  $2\pi$ -periodischen Lösung für  $k_1^* \approx 0.1214$  beobachtet werden. Für kleinere Werte  $k_1 < k_1^*$  entsteht eine stabile quasi-periodische

<sup>2</sup>Das System wurde von Yoshinga und Kawakami (1995) behandelt und in Arbeiten von Vogt et al. (2005) und Engert (2009) weiter analysiert.





**Abb. 19** Lösungsszenarien des dynamischen Systems (105). Lösungen im Bild oben links:  $k_1 = 0.15$  (periodisch),  $k_1 = 0.12$  (schwarz) und  $k_1 = 0.09$  (blau)

Lösung mit zwei Basisfrequenzen, die in Abbildung 19 weiter verfolgt wird. Es wird eine Kaskade von Periodenverdopplungen bezüglich einer der beiden Basisfrequenzen (Torusdopplungen) erkennbar, die schließlich in eine chaotische Lösung übergeht. Die stroboskopische Poincaré-Abbildung mit Periode  $T = 2\pi$  wird in Abbildung 19 durch die dick eingezeichneten Punkte dargestellt. Zur Bestimmung der 2-Tori mittels Semi-diskretisierung der PDGL (94) wählen wir einen reellen Ansatz erster Ordnung für das Spektralsystem (96)

$$\begin{pmatrix} u_1(t, \theta) \\ u_2(t, \theta) \\ u_3(t, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) & y_3(\theta) \\ y_4(\theta) & y_5(\theta) & y_6(\theta) \\ y_7(\theta) & y_8(\theta) & y_9(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad (106)$$

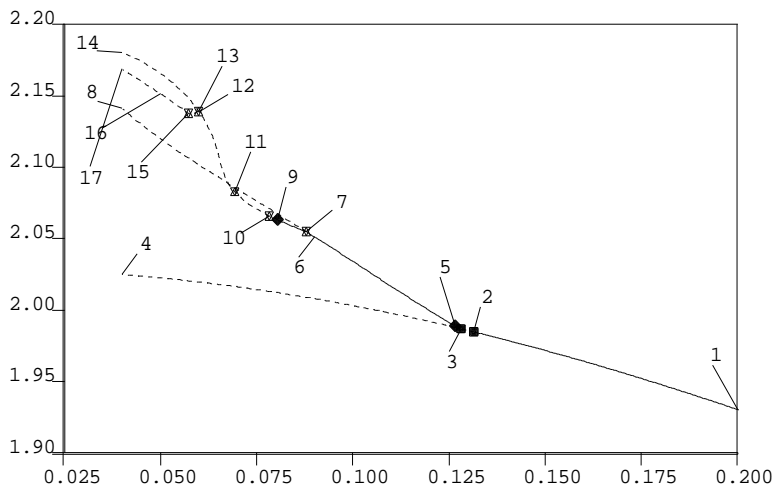
bzw. in Matrixform  $u(t, \theta) = Y(\theta)\varphi(t)$  mit

$$Y(\theta) = \begin{pmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) & y_3(\theta) \\ y_4(\theta) & y_5(\theta) & y_6(\theta) \\ y_7(\theta) & y_8(\theta) & y_9(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

da das nachfolgend genutzte Programmpaket AUTO2000 nur reelle Systeme analysieren kann. Setzen wir Ansatz (106) in die PDGL (94) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen und Anwendung der Galerkin-Bedingung – hier ist tatsächlich ein Computeralgebra-System wie MAPLE überaus hilfreich – folgendes Spektralsystem, wobei der Strich die Ableitung nach  $\theta = \omega t$  kennzeichnet:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_4 \\
y_2' &= y_5 + y_3 \\
y_3' &= y_6 - y_2 \\
y_4' &= -0.1875 y_1 y_8^2 - k_1 y_4 - 0.1875 y_1 y_9^2 - 0.1875 y_1 y_2^2 - 0.375 y_1 y_7^2 \\
&\quad - 0.375 y_2 y_7 y_8 - 0.375 y_3 y_7 y_9 - 0.1875 y_1 y_3^2 - 0.125 y_1^3 \\
y_5' &= -0.375 y_2 y_1^2 - 0.375 y_2 y_7^2 - 0.75 y_1 y_7 y_8 - 0.28125 y_2 y_8^2 + y_6 \\
&\quad - 0.09375 y_2 y_3^2 - 0.09375 y_2 y_9^2 - k_1 y_5 - 0.09375 y_2^3 \\
&\quad - 0.1875 y_3 y_9 y_8 \\
y_6' &= -0.375 y_3 y_7^2 - 0.375 y_3 y_1^2 - 0.28125 y_3 y_9^2 - 0.09375 y_3 y_8^2 \\
&\quad - 0.1875 y_2 y_9 y_8 + B - y_5 - 0.09375 y_3^3 - k_1 y_6 - 0.75 y_1 y_7 y_9 \\
&\quad - 0.09375 y_3 y_2^2 \\
y_7' &= -0.375 k_2 y_9 y_1 y_3 - 0.1875 k_2 y_7 y_2^2 - 0.1875 k_2 y_9^2 y_7 \\
&\quad - 0.1875 k_2 y_7 y_3^2 - 0.375 k_2 y_7 y_1^2 - 0.125 k_2 y_7^3 + B0 \\
&\quad - 0.1875 k_2 y_8^2 y_7 - 0.375 k_2 y_8 y_1 y_2 \\
y_8' &= -0.375 k_2 y_8 y_1^2 - 0.09375 k_2 y_8^3 - 0.75 k_2 y_7 y_1 y_2 + y_9 \\
&\quad - 0.1875 k_2 y_9 y_3 y_2 - 0.09375 k_2 y_8 y_9^2 - 0.09375 k_2 y_8 y_3^2 \\
&\quad - 0.375 k_2 y_8 y_7^2 - 0.28125 k_2 y_8 y_2^2 \\
y_9' &= -0.75 k_2 y_7 y_1 y_3 - 0.09375 k_2 y_9^3 - 0.09375 k_2 y_8^2 y_9 \\
&\quad - 0.09375 k_2 y_9 y_2^2 - 0.375 k_2 y_9 y_7^2 - 0.1875 k_2 y_8 y_3 y_2 - y_8 \\
&\quad - 0.375 k_2 y_9 y_1^2 - 0.28125 k_2 y_9 y_3^2.
\end{aligned}$$

Für dieses System sind nun Ruhelagen und periodische Lösungen gesucht, wobei erstere periodischen und letztere quasi-periodischen Lösungen des Originalsystems (105) entsprechen. Die numerische Analyse des Spektralsystems wurde mit dem Programmpaket AUTO2000 durchgeführt (vgl. Doedel et al. (2002)), die Ergebnisse sind in den Abbildungen 20 und 21 grafisch dargestellt. Die Identifikation periodischer Lösungen des Spektralsystems mit quasi-periodischen Lösungen des Originalsystems gemäß Tabelle 1 ist prinzipiell erfolgreich, jedoch stimmen die Stabilitätsverhältnisse der einander zugeordneten

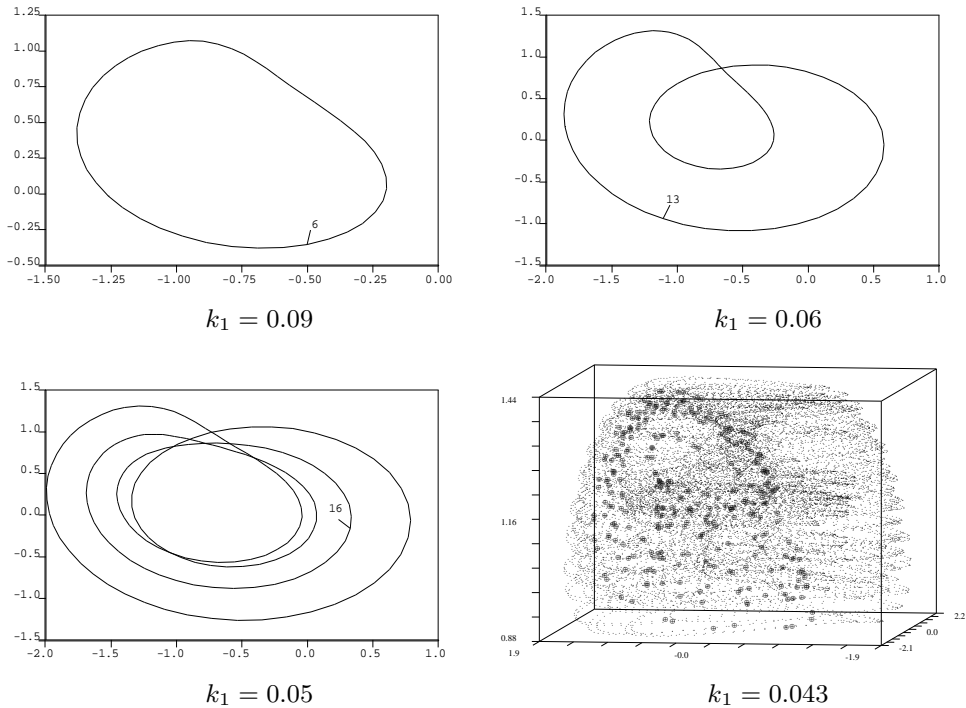


**Abb. 20** Bifurkationsdiagramm des Spektralsystems für  $k_1 \in [0.025, 0.20]$ : Hopf-Bifurkationen treten bei  $k_1 \approx 0.1315$  und  $0.1281$  (Label 2 und 3) auf. Der Zweig ab Label 3 für  $k_1 \approx 0.1281$  wurde weiter verfolgt. Es tritt eine Kaskade von Periodenverdopplungen (Label 7, 13, 15) auf

Objekte nur bedingt überein. Eine zuverlässige Stabilitätsanalyse quasi-periodischer Lösungen ist mittels der hier vorgestellten Spektralmethode noch nicht möglich. Anders als im behandelten Fall lassen sich Spektralsysteme höherer Ordnung, d. h. mit größerem Diskretisierungsparameter  $N$ , in der Regel nicht mehr in analytischer Form generieren. Damit entfällt der Vorteil der Semidiskretisierung gegenüber einer kompletten Diskretisierung bezüglich aller unabhängigen Variablen  $\theta_i$ . Im praxisrelevanten Fall von 2-Tori bei periodisch erregten Systemen bietet sie jedoch eine interessante und überaus effiziente Alternative zur Volldiskretisierung.

**Tab. 1** Interpretation des Bifurkationsdiagramms in Abbildung 20 für das Spektralsystem

Label-Nr.	Spektralsystem	Originalsystem
1	stabile Gleichgewichtslage	stabile periodische Lösung
3	Hopf-Bifurkation	Torus-Bifurkation
6	stabile periodische Lösung	stabiler invarianter Torus
7	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
12	instabile 2-periodische Lösung	stabiler invarianter Doppel-Torus
13	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
16	instabile 4-periodische Lösung	stabiler invarianter Vierfach-Torus
15	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
—	seltsamer Attraktor	seltsamer Attraktor



**Abb. 21** Drei periodische Orbits des Spektralsystems; es tritt offenbar eine Sequenz von Periodenverdopplungen auf. Für  $k_1 = 0.043$  wird ein Orbit zusammen mit den Stroboskop-Punkten (fette Punkte) dargestellt

### 4.3 Volldiskretisierung mit Fourier-Galerkin-Methode

Abgesehen von 2-Tori bei periodisch erregten Systemen ist eine vollständige Diskretisierung zur Lösung der Invarianzgleichung (80)

$$\sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) = f(u(\theta), \theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^p \quad (107)$$

sinnvoll. Dazu bieten sich *Finite-Differenzen-Verfahren*, *Galerkin-Verfahren* und *Kollokationsverfahren* gleichermaßen an. Wir nutzen die Methode von Galerkin<sup>3</sup> und setzen die gesuchte Lösung  $u = u(\theta)$  in Form  $p$ -dimensionaler Fourier-Polynome an. Diese *Fourier-Galerkin-Methode*, die mit ihrem Ansatz eine Spektralmethode bildet, erweist sich als besonders erfolgreich, wenn die Funktionen in (107) gut durch Fourier-Polynome approximiert werden können. Bei hinreichender Glattheit der Problemdata liefern die Finite-Differenzen-Methode in Schilder (2004) und das Kollokationsverfahren bei Schreiber (2004) ähnliche Resultate.

<sup>3</sup> Boris Grigorjevich Galerkin (1871–1945), sowjetischer Ingenieur und Mathematiker, veröffentlichte 1915 seine Methode, die die Tradition der Variationsmethoden (Euler, Lagrange) fortsetzt.

Wir fassen die Invarianzgleichung (107) als nichtlineare Operatorgleichung in den im vorigen Abschnitt eingeführten Sobolew-Räumen  $\mathcal{H}^s := [\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^p)]^n$  auf, und führen den Operator  $F : \mathcal{H}^{s+1} \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}^s$  mit

$$F(u, \omega)(\theta) := \sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) - f(u(\theta), \theta) \quad (108)$$

ein. Mit Hilfe des linearen Differenzialoperators  $D : \mathcal{H}^{s+1} \times \mathbb{R}^{p-m} \rightarrow \mathcal{H}^s$  mit

$$D(u, \omega)(\theta) := \sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) + \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) \quad (109)$$

und des nichtlinearen Nemytski-Operators  $N : \mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{H}^s$  mit

$$N(u)(\theta) := -f(u(\theta), \theta) \quad (110)$$

können wir nun die Operatorgleichung kürzer in der Form

$$F(u, \omega) = D(u, \omega) + N(u) = 0, \quad (u, \omega) \in \mathcal{H}^{s+1} \times \mathbb{R}^{p-m} \quad (111)$$

notieren. Diese Gleichung ist im Fall  $p > m$  mit  $p - m$  freien Basisfrequenzen  $\omega$  ein schlecht gestelltes Problem, da keine Eindeutigkeit der Lösung vorliegt. Nach der Diskretisierung wollen wir diese Tatsache berücksichtigen und die entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Newton-Verfahren lösen.

Wir setzen die Lösung  $u$  der nichtlinearen Operatorgleichung (111) als Fourier-Polynom

$$u^N(\theta) = \sum_{\|k\| \leq N} u_k \varphi_k(\theta) \quad (112)$$

mit Multi-Index  $k = (k_1, \dots, k_p)$  und den trigonometrischen Basisfunktionen

$$\varphi_k(\theta) = e^{i(k, \theta)}, \quad (k, \theta) = \sum_{j=1}^p k_j \theta_j, \quad (113)$$

an. Wir wollen vereinbaren, dass  $\|k\| \leq N$  soviel wie  $|k_j| \leq N_j$ ,  $j = 1(1)p$  mit dem Diskretisierungsparameter  $N := \min\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$  bedeutet. Die partiellen Ableitungen von  $u^N(\theta)$  berechnen wir nach

$$\frac{\partial u^N}{\partial \theta_j}(\theta) = \sum_{\|k\| \leq N} i k_j u_k \varphi_k(\theta), \quad j = 1(1)p,$$

und erhalten damit für den Differenzialoperator (109) die Darstellung

$$D(u^N, \omega)(\theta) = \sum_{\|k\| \leq N} \left( \sum_{j=1}^m \Omega_j k_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j k_j \right) i u_k \varphi_k(\theta). \quad (114)$$

Wenden wir die Galerkin-Bedingung (d. h. die Forderung nach Orthogonalität des Residuums bezüglich aller Basisfunktionen) auf den Operator  $F$  an, so bedeutet dies

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} [D(u^N, \omega)(\theta) - f(u^N(\theta), \theta)] \overline{\varphi_k(\theta)} d\theta = 0, \quad \|k\| \leq N,$$

wobei das Integral komponentenweise auszuwerten ist. Mit (114) und unter Beachtung der Orthonormalität der Basisfunktionen  $\varphi_k(\theta)$  erhalten wir

$$\int_{\mathbb{T}^p} D(u^N, \omega)(\theta) \overline{\varphi_k(\theta)} d\theta = \left( \sum_{j=1}^m \Omega_j k_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j k_j \right) i u_k.$$

Notieren wir einen Fourier-Ansatz  $M$ -ter Ordnung für  $f(u^N(\theta), \theta)$

$$f(u^N(\theta), \theta) \cong \sum_{\|k\| \leq M} f_k \varphi_k(\theta) \quad \text{mit} \quad f_k = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} f(u(\theta), \theta) \overline{\varphi_k(\theta)} d\theta,$$

und  $M \geq N$ , so führt die Galerkin-Bedingung auf das komplexwertige Gleichungssystem

$$G_k(\tilde{u}, \omega) := \left( \sum_{j=1}^m \Omega_j k_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j k_j \right) i u_k - f_k = 0, \quad \|k\| \leq N \quad (115)$$

mit den  $m := \prod_{j=1}^p (2N_j + 1)$  vektoriellen Koeffizienten  $u_k \in \mathbb{C}^n$  und den reellen Unbekannten  $\omega = (\omega_{m+1}, \dots, \omega_p)^T$ . Dieses Gleichungssystem ist im Allgemeinen nichtlinear, da die  $u_k$  implizit in die Fourier-Koeffizienten  $f_k$  eingehen. Im Response-Fall fällt bei obigem Gleichungssystem die zweite Summe weg und das System ist normalbestimmt. Wir fassen die Unbekannten  $u_k \in \mathbb{C}^n$  in dem Supervektor  $\tilde{u}$  in lexikographischer Ordnung bezüglich der  $p$  Indizes zusammen mittels

$$\tilde{u} = (u_k)_{\|k\| \leq N}^{\text{lex}} := \begin{pmatrix} u_{-N_1|-N_2|\dots|-N_{p-1}|-N_p} \\ u_{-N_1|-N_2|\dots|-N_{p-1}|-N_{p+1}} \\ \vdots \\ u_{-N_1|-N_2|\dots|-N_{p-1}|N_p} \\ u_{-N_1|-N_2|\dots|-N_{p-1}+1|-N_p} \\ \vdots \\ u_{N_1|N_2|\dots|N_{p-1}|N_p} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \cdot m}. \quad (116)$$

In analoger Weise bilden wir mit den Vektoren  $G_k(\tilde{u}, \omega)$  in lexikographischer Anordnung einen Supervektor  $\tilde{G}(\tilde{u}, \omega) = (G_k(\tilde{u}, \omega))_{\|k\| \leq N}^{\text{lex}}$  und erhalten so die Nullstellenaufgabe

$$\tilde{G}(\tilde{u}, \omega) = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{u} \in \mathbb{C}^{n \cdot m}, \quad \omega \in \mathbb{R}^{p-m}. \quad (117)$$

Im Falle  $p > m$  ist dieses System unterbestimmt, da es  $m$  Unbekannte  $u_k \in \mathbb{C}^n$  und  $p - m$  reelle Unbekannte  $\omega_j$ , aber nur  $nm$  Gleichungen besitzt. Zur Lösung derartiger algebraischer Gleichungssysteme bietet sich das in Vogt (2010a) eingeführte Gauß-Newton-Verfahren in der Form

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{\nu+1} \\ \omega^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^\nu \\ \omega^\nu \end{pmatrix} - [\tilde{G}'(\tilde{u}^\nu, \omega^\nu)]^+ \tilde{G}(\tilde{u}^\nu, \omega^\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (118)$$

an. Dabei bezeichnet  $[\tilde{G}'(\tilde{u}^\nu, \omega^\nu)]^+$  die Pseudoinverse von  $\tilde{G}'(\tilde{u}^\nu, \omega^\nu)$ . Wir notieren dieses Verfahren in der praktikableren Form für  $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$\tilde{G}'(\tilde{u}^\nu, \omega^\nu) \begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix} = -\tilde{G}(\tilde{u}^\nu, \omega^\nu), \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}^{\nu+1} \\ \omega^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^\nu \\ \omega^\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix} \quad (119)$$

mit dem lexikographisch geordneten Supervektor  $z = (z_k)_{\|k\| \leq N}^{\text{lex}}$  und  $\xi = (\xi_{m+1}, \dots, \xi_p)^T$  als Newton-Korrekturen. Die Block-Komponenten der Jacobi-Matrix  $\tilde{G}'(\tilde{u}, \omega)$  berechnen wir mittels

$$\begin{aligned} G'_k(\tilde{u}, \omega) &= \left( \frac{\partial}{\partial u_l} G_k(\tilde{u}, \omega), \frac{\partial}{\partial \omega} G_k(\tilde{u}, \omega) \right) \\ &= \left( \left( \frac{\partial}{\partial u_l} G_k(\tilde{u}, \omega) \right)_{\|l\| \leq N}^{\text{lex}^T}, \frac{\partial}{\partial \omega_{m+1}} G_k(\tilde{u}, \omega), \dots, \frac{\partial}{\partial \omega_p} G_k(\tilde{u}, \omega) \right), \end{aligned}$$

wobei sich für  $\|l\| \leq N$  die  $m$  komplexwertigen  $(n \times n)$ -Blockmatrizen

$$\frac{\partial}{\partial u_l} G_k(\tilde{u}, \omega) = \begin{cases} -\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} \frac{\partial f}{\partial u}(u^N(\theta), \theta) \varphi_l(\theta) \overline{\varphi_k(\theta)} d\theta & , k \neq l \\ \left( \sum_{j=1}^m \Omega_j k_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j k_j \right) iI_n - \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} \frac{\partial f}{\partial u}(u^N(\theta), \theta) d\theta & , k = l, \end{cases}$$

ergeben und die  $p - m$  Vektoren

$$\frac{\partial}{\partial \omega_j} G_k(\tilde{u}, \omega) = ik_j u_k, \quad j = m+1, \dots, p$$

lauten. Führen wir nun die Fourier-Transformationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u(\theta), \theta) &=: A(\theta) \cong \sum_{\|l\| \leq M} A_l \varphi_l(\theta) \quad \text{mit} \quad A_l := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} A(\theta) \overline{\varphi_l(\theta)} d\theta \\ -\frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) &=: h_j(\theta) \cong \sum_{\|l\| \leq M} h_l^j \varphi_l(\theta) \quad \text{mit} \quad h_l^j := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} h_j(\theta) \overline{\varphi_l(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (120)$$

mit  $j = m+1, \dots, p$  ein und beachten, dass  $ik_j u_k$  der  $k$ -te Fourier-Koeffizient von  $\frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta)$  ist, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial u_l} G_k(\tilde{u}, \omega) = \begin{cases} -A_{k-l} & , k \neq l \\ \left( \sum_{j=1}^m \Omega_j k_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j k_j \right) iI_n - A_0 & , k = l \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \omega_j} G_k(\tilde{u}, \omega) = -h_k^j.$$

Schließlich setzen wir zur Berechnung der rechten Seite des Systems (119) die Funktion

$$b(\theta) := f(u(\theta), \theta) - \sum_{j=1}^m \Omega_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) - \sum_{j=m+1}^p \omega_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j}(\theta) \quad (121)$$

mit der zugehörigen Fourier-Transformation

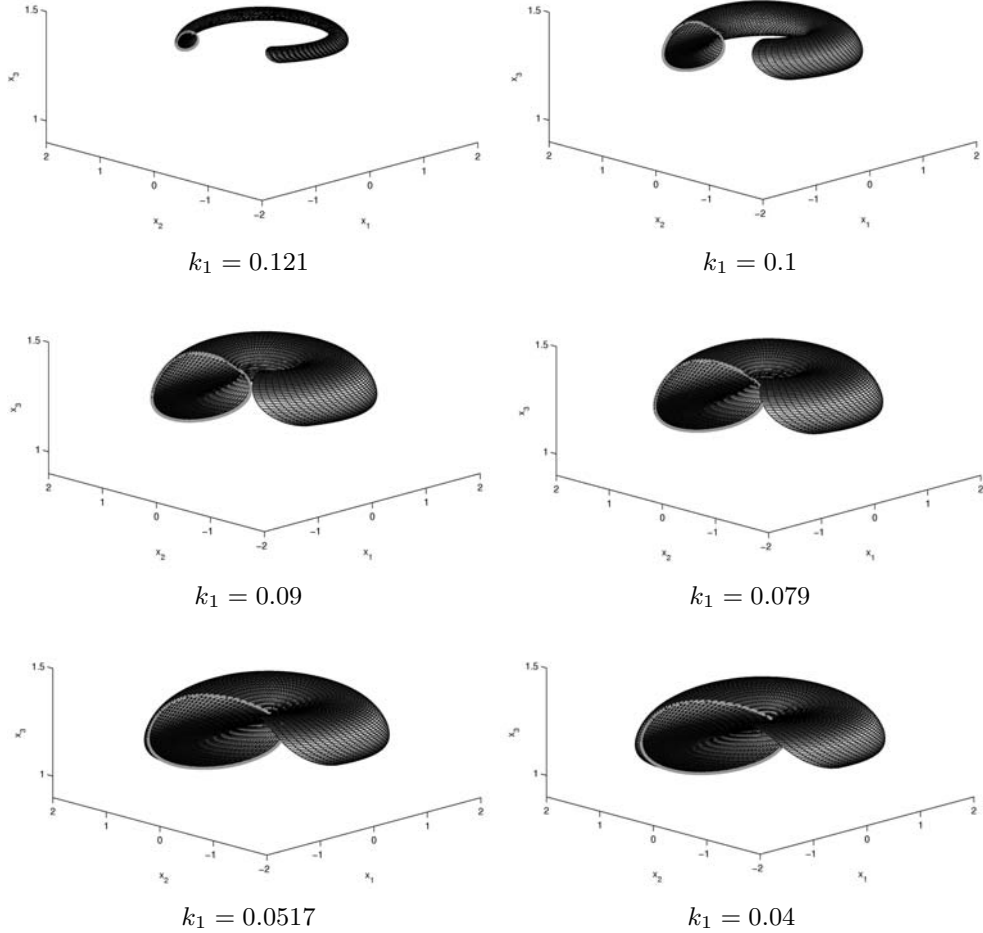
$$b(\theta) \cong \sum_{\|l\| \leq M} b_l \varphi_l(\theta) \quad \text{mit} \quad b_l := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^p} b(\theta) \overline{\varphi_l(\theta)} d\theta \quad (122)$$

### ALGORITHMUS 33 (Fourier-Galerkin-Verfahren für Tori)

Function  $[u, \omega] = \text{Fourier\_Galerkin}(f, \text{tol}, \nu_{\max})$

1. (Startnäherung) Wähle  $u^{(0)} \in \mathbb{C}^{nm}$  und  $\omega^{(0)} \in \mathbb{R}_+^{p-m}$ .
2. Für  $\nu = 0, 1, \dots, \nu_{\max}$  iteriere:
  - 2.1. Berechne  $A(\theta), h_j(\theta)$  nach (120) und  $b(\theta)$  nach (121).
  - 2.2. (FFT) Berechne die zugehörigen Fourier-Koeffizienten  $A_k, b_k, h_k^j$  für  $\|k\| \leq N$  und  $j = m+1, \dots, p$  mittels p-dimensionaler schneller Fourier-Transformation.
  - 2.3. Löse das lineare Gleichungssystem (119) nach  $z$  und  $\xi$  auf.
  - 2.4. Bilde  $u^{(\nu+1)} = u^{(\nu)} + z$  und  $\omega^{(\nu+1)} = \omega^{(\nu)} + \xi$ .
  - 2.5. Ist  $\|z\|_{\mathcal{H}^0}^2 + \|\xi\|_{\mathbb{C}^{p-m}}^2 < \text{tol}^2$ , so setze  $u = u^{(\nu+1)}$ ,  $\omega = \omega^{(\nu+1)}$  und gehe zu Schritt 3.
3. Return  $u, \omega$





**Abb. 22** Der einfache invariante Torus des Systems (124) für sechs Parameterwerte. Die Darstellung erfolgt in  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ . Der Torusschnitt erfolgt stets für  $\theta_1 = 0$

an und beachten, dass  $b_k = -G_k(\tilde{u}, \omega)$  gilt. Damit gewinnen wir in jedem Newton-Schritt die explizite Darstellung des unterbestimmten linearen Gleichungssystems (119) für alle Multiindizes  $\|k\| \leq N$  in der Form

$$\left( \sum_{j=1}^m \Omega_j k_j + \sum_{j=m+1}^p \omega_j k_j \right) i z_k - \sum_{\|l\| \leq N} A_{k-l} z_l - \sum_{j=m+1}^p \xi_j h_k^j = b_k \quad (123)$$

mit den  $m = \prod_{j=1}^p (2N_j + 1)$  unbekannten Vektoren  $z_l \in \mathbb{C}^n$  und den  $p - m$  reellen Unbekannten  $\xi_j$ . Eine Lösung minimaler Norm dieses Systems kann nunmehr mit Standard-Software für unterbestimmte lineare Gleichungssysteme, z. B. mit MATLAB ermittelt werden. Eine empfehlenswerte Darstellung zu diesem Thema findet der interessierte Leser bei Gramlich und Werner (2000).

### Bemerkung 34

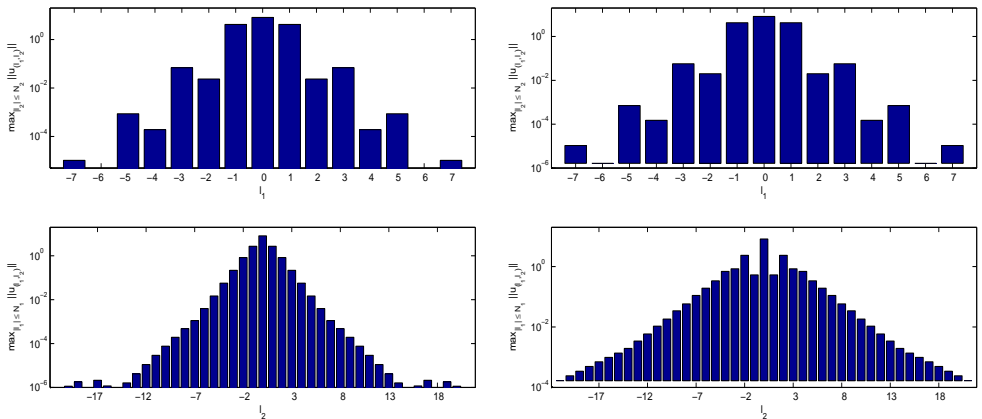
1. Algorithmus 33 stellt das Newton-Verfahren (119) lediglich in seiner Grundform vor. Zu seiner praktischen Realisierung sollten allerdings die in Vogt (2010a) eingeführten Newton-ähnlichen Verfahren implementiert werden.
2. Bei Vorliegen *parameterabhängiger Systeme* empfiehlt sich der Einbau des Newton-Verfahrens aus Algorithmus 33 als Korrektorverfahren in ein leistungsfähiges Prädiktor-Korrektor-Fortsetzungsverfahren (vgl. Vogt (2010a)). Damit stehen die in der Regel schwer zu beschaffenden Startlösungen  $u^{(0)}$  und  $\omega^{(0)}$  in jedem Fortsetzungsschritt – mit Ausnahme des Anfangsschrittes – stets zur Verfügung. ■

### Beispiel 35

Wir greifen das System (105) des nichtlinearen elektrischen Resonanzkreises von Ch. Hayashi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_2 - \frac{1}{8}(x_1^2 + 3x_3^2)x_1 + B \cos t \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{8}k_2(3x_1^2 + x_3^2)x_3 + B_0\end{aligned}\tag{124}$$

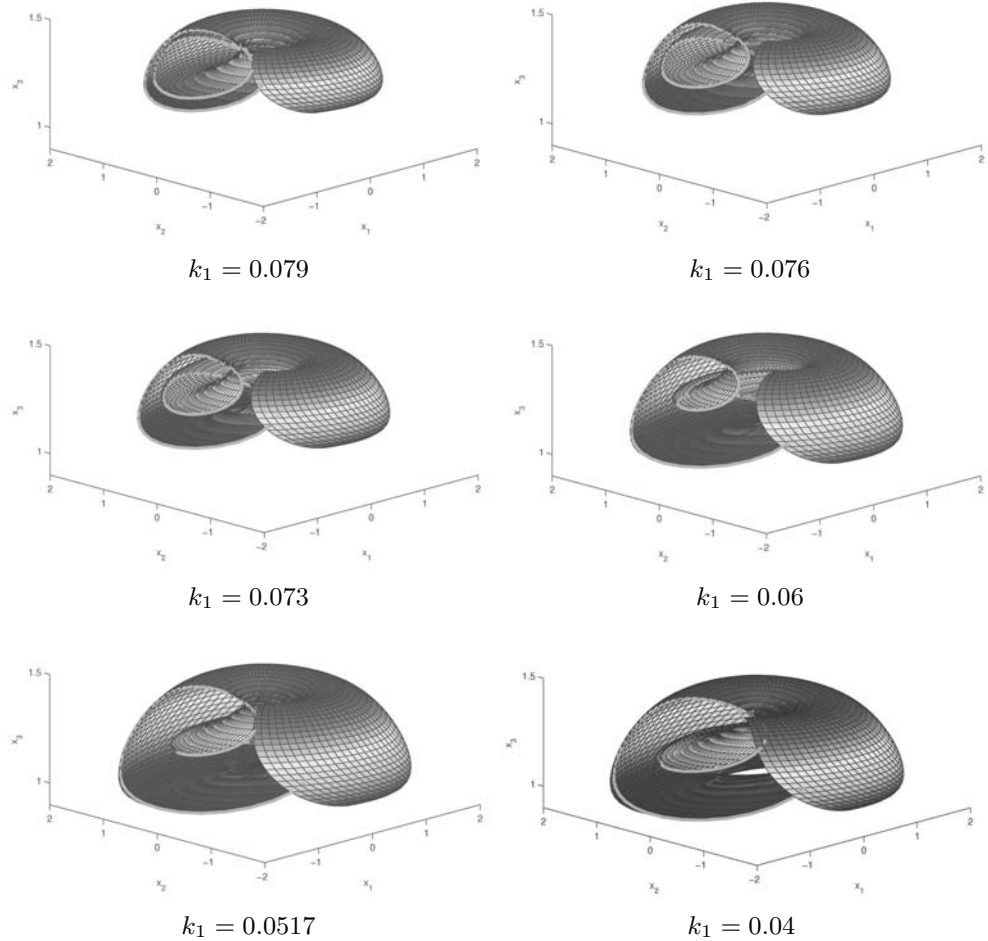
mit den Parameterwerten  $B_0 = 0.03$ ,  $B = 0.22$ ,  $k_2 = 0.05$  und dem Kontrollparameter  $k_1 \in [0.043, 0.09]$  auf und wenden darauf die vorgestellte Spektralmethode an. Mit dem von Schreiber (2004) an der TU Ilmenau entwickelten Analyseprogramm **specont** wird eine Parameterfortsetzung des einfachen Torus für  $k_1 \in [0.04, 0.121]$  und des nach Tabelle 1 erhaltenen gedoppelten Torus für  $k_1 \in [0.04, 0.077]$  durchgeführt.



**Abb. 23** System (124): Normmaximale Fourier-Koeffizienten bzgl.  $\theta_1$  (oben) und  $\theta_2$  (unten) des einfachen Torus (links) und des gedoppelten Torus (rechts) am Parameterwert  $k_1 = 0.07$

Mit dem Fourier-Galerkin-Verfahren ist die Fortsetzung der stabilen Tori bezüglich des Parameters  $k_1$  in Bereiche mit sich ändernder Stabilitätseigenschaft problemlos möglich,

da das Fourier-Galerkin-Verfahren keine Stabilitätsvoraussetzungen erfordert. Als Dis-



**Abb. 24** Der gedoppelte invariante Torus des Systems (124) zu ausgewählten Parameterwerten sowie der Torusschnitt für  $\theta_1 = 0$

kretisierungsparameter dienen stets  $N_1 = 7$  und  $N_2 = 21$ . Die Abbildungen 22 und 24 zeigen einige ausgewählte Tori zu verschiedenen Parameterwerten. Die exponentielle Konvergenz des Spektralansatzes spiegelt sich im exponentiellen Abfall der Normen der Fourier-Koeffizienten wider. In Abbildung 23 ist dieser Sachverhalt in logarithmischer Darstellung für den Parameterwert  $k_1 = 0.07$  gut zu erkennen. Die Koeffizienten bezüglich  $\theta_1$  verhalten sich für beide Tori ähnlich. Das rapide Abfallen der Normen der Koeffizienten lässt sich auch in unmittelbarer Nähe von Verzweigungspunkten beobachten, so dass selbst dort die exponentielle Konvergenz erhalten bleibt. ■

Insgesamt erscheint die *Volldiskretisierung* mit Fourier-Galerkin-Ansatz besonders geeignet, wenn die Lösung hinreichend glatt ist. Dann lässt sich der gesuchte Torus bereits mit wenigen Termen der Fourier-Reihe gut approximieren und die im Verfahren entstehenden Gleichungssysteme sind von akzeptabler Größe. Im Gegensatz zur *Semidiskretisierung* erfordert sie zudem keine analytischen Manipulationen des Ausgangssystems mit Computeralgebrasystemen, deren Grenzen recht schnell erreicht sind. Die numerische schnelle Fourier-Transformation ist hingegen problemlos möglich.

Auf die theoretisch komplizierte Konvergenzanalyse – besonders im Falle freier Phasen mit  $p - m$  freien Basisfrequenzen – kann hier nicht eingegangen werden. Weitere Untersuchungen sind ebenfalls bei der Lösungsfortsetzung parameterabhängiger Systeme zum Verhalten des Verfahrens in unmittelbarer Nähe von Resonanzen nötig. Zu diesen und weiteren interessanten Fragen bei der numerischen Behandlung der Bifurkationen invarianter Tori verweisen wir den Leser auf die grundlegenden Beiträge in Doedel und Tuckerman (2000) und Krauskopf et al. (2007) sowie auf den Beitrag Vogt et al. (2005), die allerdings über den Rahmen dieses Beitrages weit hinausgehen.

## 5 Zusammenfassung

Quasi-periodische Orbits bilden ein kompliziertes und sensitives Studienobjekt. Als „stabilerer Träger“ dieser multifrequentiellen Schwingungen werden deshalb in diesem Beitrag invariante Tori untersucht. Aus der Vielzahl spezieller Ansätze zur numerischen Approximation von Torusmannigfaltigkeiten werden zwei praktikable und hinreichend allgemeine Vorgehensweisen behandelt und algorithmisch dargestellt.

- Der erste Ansatz folgt der Theorie und transformiert die DGL in Toruskoordinaten. Die Torusmannigfaltigkeit wird deshalb durch ein quasilineares partielles DGL-System beschrieben. Dieses kann mittels numerischer Verfahren (FDM, FEM) erfolgreich gelöst werden. Vorgestellt und begründet werden explizite und linear implizite FDM 1. Ordnung vom Upwind-Typ. Damit gelingt sowohl die Approximation quasi-periodischer als auch resonanter Tori.
- Beim zweiten Ansatz wird eine spezielle Invarianzgleichung in den vorgegebenen kartesischen Koordinaten entwickelt, die sich als direkte Verallgemeinerung des Gleichgewichtsfalles (0-Torus) und periodischer Orbits (1-Torus) erweist. Im Falle „freier Phasen“ sind allerdings Zusatzbedingungen zur Festlegung der Basisfrequenzen erforderlich. Mittels FDM oder – wie im Beitrag vorgestellt – Galerkin-Verfahren lassen sich damit quasi-periodische Tori gut approximieren.

Die vorgestellten Anwendungen wurden durchweg mit der an der TU Ilmenau entwickelten Software behandelt und sollen zusammen mit nachfolgenden Aufgaben der Veranschaulichung der numerischen Verfahren dienen.

## 6 Aufgaben

### Aufgabe 1

Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  quasi-periodisch sind:

a)  $f(t) = a \cdot \exp(\cos t - \cos(\sqrt{5} \cdot t) + 1) - \cos(\sqrt{10} \cdot t) \quad \text{für } a \in \mathbb{R},$

b)  $f(t) = \cos(\exp(1) \cdot t) - \sin(\pi \cdot t)$

c)  $f(t) = \cos(2.71828 \cdot t) - \sin(3.14159 \cdot t)$

d)  $f(t) = \cos(2.718281828 \cdot t) - \sin(3.141592654 \cdot t)$

e)  $f(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) - \cos(\sqrt{2} \cdot t) \\ \sin^2(\sqrt{8} \cdot t) + \cos^2(\sqrt{8} \cdot t) \\ \cos(\sqrt{2} \cdot t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$

f)  $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{8} \cdot t) \cdot \sin t \\ \exp(\cos(\pi \cdot t)) + \cot(\pi\sqrt{2} \cdot t) \\ \tan(\sqrt{2} \cdot t) \cdot \cos t \end{pmatrix}$

g)  $f(t) = 1.3 \sin(23.47055t + 0.3 \cos(6\pi t)).$

Geben Sie jeweils die Basisfrequenzen  $w_i$  und deren Anzahl an. Ist die erhaltene Frequenzbasis maximal? Bestimmen Sie bei Vorliegen periodischer Funktionen deren (minimale) Periodendauer  $T$ .

### Aufgabe 2

Gegeben sei das System zweier linear gekoppelter Oszillatoren, modelliert durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - (x_1^2 + y_1^2)x_1 - \delta(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) \\ \dot{y}_1 &= -\beta_1 x_1 + \alpha_1 y_1 - (x_1^2 + y_1^2)y_1 - \delta(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 - (x_2^2 + y_2^2)x_2 + \delta(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) \\ \dot{y}_2 &= -\beta_2 x_2 + \alpha_2 y_2 - (x_2^2 + y_2^2)y_2 + \delta(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) \end{aligned}$$

mit Parameterwerten  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$ ,  $\beta_1 = 0.55$ ,  $\beta_2 > 0$  und einem reellen Kopplungsparameter  $\delta \geq 0$ .

- Bestimmen Sie im entkoppelten Fall ( $\delta = 0$ ) periodische und quasi-periodische Orbits des Systems.
- Führen Sie Polarkoordinaten  $x_i = u_i \cos \theta_i$ ,  $y_i = -u_i \sin \theta_i$ ,  $i = 1, 2$ , ein und transformieren Sie bei beliebigen Parametern die DGL in die partitionierte Form (21). Wie lautet die entsprechende partielle DGL (35)?
- Entwickeln Sie ein numerisches Verfahren zur Lösung der PDGL (35) auf dem Torus  $\mathbb{T}^2$  mittels des expliziten Upwind-Verfahrens (64).

- d) Erproben Sie Ihr Verfahren mit den Parameterwerten (i)  $\beta_2 = 0.55$  und (ii)  $\beta_2 = 1.578$  mit den Werten  $\delta = 0.01, 0.1, 0.2, 0.25, 0.26$  des Kopplungsparameters  $\delta$ . Vergleichen Sie das Verhalten des Verfahrens in den beiden Fällen (i) und (ii).

### Aufgabe 3

Gegeben ist die DGL (71) von Philippow und Büntig (1992)

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x}^3 - \beta \dot{x} + (1 + B \sin 2t)x = 0 \quad (125)$$

mit Amplitude  $B = 0.1$ , den Werten  $\alpha = \varepsilon - B$ ,  $\beta = \varepsilon/2 - B$  und dem reellen Parameter  $\varepsilon > 0$ , die ein parametrisch erregtes elektrisches Netzwerk mit subharmonischer Systemantwort beschreibt.

- Überführen Sie die DGL in ein System 1. Ordnung und danach mittels Polarkoordinaten in die partitionierte Form (21). Geben Sie die entsprechende PDGL (35) an.
- Lösen Sie die PDGL (35) auf dem Torus  $\mathbb{T}^2$  mittels des expliziten Upwind-Verfahrens (64) für Parameterwerte  $\varepsilon = 1.5, 1.6, 3.0, 6.0, 9.0$ . Stellen Sie die Torusquerschnitte wie in Abbildung 15 graphisch dar.
- Wie verhält sich das Verfahren in der Nähe von Resonanzen bei  $\varepsilon = 1.344$ ,  $\varepsilon = 5.493$  und  $\varepsilon = 7.054$ ?

### Aufgabe 4

Die DGL (125) aus Aufgabe 3 mit den Parameterwerten  $B = 0.1$ ,  $\alpha = \varepsilon - B$ ,  $\beta = \varepsilon/2 - B$  und  $\varepsilon > 0$  soll mit dem Fourier-Galerkin-Verfahren gelöst werden.

- Notieren Sie die vereinfachte Invarianzgleichung der Form (94) mit  $n = 2$  für quasi-periodische 2-Tori. Entwickeln Sie auf der Basis von Algorithmus 33 ein Fourier-Galerkin-Verfahren zur Lösung dieser Invarianzgleichung für 2-Tori periodisch erregter Gleichungen, d. h. mit  $m = 1$  und  $p = 2$ .
- Erproben Sie das Verfahren am parametrisch erregten Netzwerk für Parameterwerte  $\varepsilon = 1.5, 1.6, 3.0, 6.0, 9.0$  und in der Nähe von Resonanzen bei  $\varepsilon = 1.344$ ,  $\varepsilon = 5.493$  und  $\varepsilon = 7.054$ .
- Vergleichen Sie die Resultate, die mit unterschiedlichen Diskretisierungsparametern  $N_1$  und  $N_2$  erhalten wurden. Stellen Sie die Beträge der Fourier-Koeffizienten wie in Abbildung 23 grafisch dar und bewerten Sie die erhaltenen Approximationen.

### Aufgabe 5

Entwickeln Sie mit einem Computeralgebra-System, z. B. MAPLE oder MATHEMATICA, ein Verfahren zur Generierung des Spektralsystems (102)

$$Y'(\tau) = H(Y(\tau)) - Y(\tau)\Phi$$

bei Semidiskretisierung im Falle  $m = 1$  und  $p = 2$ . Wenden Sie das Verfahren (a) auf das Modell (105) des elektrischen Resonanzkreises und (b) auf das parametrisch erregte elektrische Netzwerk (125) an.

# Literaturverzeichnis

- Argyris J., Faust G. und Haase M. (1995) *Die Erforschung des Chaos*. Vieweg Verlag, Braunschweig und Wiesbaden.
- Bernet K. (1995) *Ein Beitrag zur numerischen Approximation und Verfolgung von Toruslösungen parameterabhängiger nichtlinearer dynamischer Systeme*. Dissertation, TU Ilmenau, Shaker Verlag, 105 S.
- Bernet K. und Vogt W. (1994) *Anwendung finiter Differenzenverfahren zur direkten Bestimmung invarianter Tori*. ZAMM 74, No.6 ,T 577 - T 579.
- Broer H. W., Huitema G. B. und Sevryuk M. B. (1996) *Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin.
- Chen Y. und Leung A. Y. T. (1998) *Bifurcation and Chaos in Engineering*. Springer-Verlag, London.
- Courant R. und Hilbert D. (1968) *Methoden der mathematischen Physik II*. 2.Auflage, Springer-Verlag, Berlin.
- Dieci L., Lorenz J. und Russell R. D. (1991) *Numerical Calculation of Invariant Tori*. SIAM Journal on Sci. Stat. Comput., Vol. 12, S.607-647.
- Dieci L. und Lorenz J. (1995) *Computation of Invariant Tori by the Method of Characteristics*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 32, No.5, S.1436-1474.
- Dieci L. und Bader G. (1992) *On Approximating Invariant Tori: Block Iterations and Multigrid Methods for the Associated Systems*. Preprint Nr. 658, Universität Heidelberg.
- Doedel E. J., Paffenroth R. C., Champneys A. R., Fairgrieve T. F., Kuznetsov Y. A., Oldeman B. E., Sandstede B. und Wang X. (2002) *AUTO 2000 - Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont), users guide*. Concordia University, Montreal, P.Q., Canada.
- Doedel E. J. und Tuckerman L. S. (Hrsg.) (2000) *Numerical Methods for Bifurcation Problems and Large-scale Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 471 S.
- Engert S. (2009) *Vergleich numerischer Verfahren zur Berechnung des LCE-Spektrums parameterabhängiger zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme*. Diplomarbeit, TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften.
- Gramlich G. und Werner W. (2000) *Numerische Mathematik mit MATLAB*. dpunkt Verlag, Heidelberg.
- Hale J. K. (1963) *Oscillations in Nonlinear Systems*. Dover Publications, New York.
- Hayashi Ch. (1985) *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Hoffmann H. (1989) *Berechnung von periodischen Lösungen und ihrer charakteristischen Multiplikatoren im nichtautonomen und autonomen Fall*. Diplomarbeit, TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften.
- Hoffmann A., Marx B. und Vogt W. (2006) *Mathematik für Ingenieure. Band 2: Vektoranalysis, Integraltransformationen, Differenzialgleichungen, Stochastik – Theorie und Numerik*. Pearson Studium, München.
- Iooss G. und Joseph D. D. (1990) *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

- Kaas-Petersen Ch. (1985) *Computation of Quasi-periodic Solutions of Forced Dissipative Systems*. Journal of Comp. Physics, Vol.58, No.3, S.395-408.
- Krauskopf B., Osinga H. M. und Galán-Vioque J. (Hrsg.) (2007) *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*. Springer-Verlag Netherlands.
- Langford W. F. (1984) *Numerical Studies of Torus Bifurcations*. In: International Series of Numerical Mathematics, Vol.70, Birkhäuser Verlag, Basel.
- Lorenz J. (1991) *Computation of Invariant Manifolds*. In: Proceedings of the 14th Dundee Biennial Conference on Numerical Analysis, June 1991, ISBN 0-582-08908-5, Dundee.
- Mingyou H., Küpper T. und Masbaum N. (1997) *Computation of Invariant Tori by the Fourier Methods*. SIAM J. Sci. Comput., 18, S. 918-942.
- Moore G. (1996) *Computation and parametrisation of invariant curves and tori*. SIAM J. on Numer. Anal., 33, No.6, S. 2333-2358.
- Philippow E. S. und Büntig W. G. (1992) *Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme der Elektrotechnik*. Carl Hanser Verlag, München.
- Samoilenko A. M. (1991) *Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Schilder F. (2004) *Numerische Approximation quasiperiodischer invarianter Tori unter Anwendung erweiterter Systeme*. Dissertation, TU Ilmenau, Inst. f. Math., 136 S.
- Schreiber S. (2004) *Spektralmethoden und Pseudospektralmethoden zur numerischen Approximation und Verfolgung invarianter 2-Tori*. Diplomarbeit, TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften.
- Van Veldhuizen M. (1987) *A new algorithm for the numerical approximation of an invariant curve*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol.8, S.951-962.
- Vogt W. (2010) *Zur Numerik nichtlinearer dynamischer Systeme – Teil 1: Gleichgewichtslösungen*. Preprint Nr.10 - 2010, TU Ilmenau, Institut für Mathematik.
- Vogt W. (2010) *Zur Numerik nichtlinearer dynamischer Systeme – Teil 2: Periodische Schwingungen*. Preprint Nr.13 - 2010, TU Ilmenau, Institut für Mathematik.
- Vogt W., Schilder F. und Osinga H. M. (2005) *Continuation of Quasi-periodic Invariant Tori*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, Vol.4, No.3, S.459-488.
- Yoshinga T. und Kawakami H. (1995) *Bifurcations and Chaotic States in Forced Oscillatory Circuits containing Saturable Inductors*. In: Carroll T. und Pecora L., Nonlinear Dynamics In Circuits. World Scientific Publishing.